9
CONTRAINTES DANS LES POUTRES EN FLEXION

9.1 CONTRAINTES NORMALES DE FLEXION

9.1.1 Généralités

Au chapitre 8, nous avons élaboré des méthodes permettant de déterminer les efforts internes qui surviennent dans une poutre soumise à la flexion: l'effort tranchant ***V*** et le moment fléchissant ***M*** agissant sur la section transversale (perpendiculaire) de la poutre. Dans ce chapitre, nous allons établir des relations nous permettant de calculer, en chaque point, les contraintes dues à ces efforts internes.

C'est en connaissant ces contraintes que nous pourrons effectivement vérifier la résistance d'une poutre ou en déterminer les dimensions.

9.1.2 Contraintes normales de flexion pure

On dit qu'il y a flexion pure si, à une section donnée d'une poutre, seul le moment fléchissant M n'est pas nul, la *figure 9.1* (page suivante) nous montre un exemple de flexion pure. Dans la zone 2 à 4 m, V = 0 tandis que M = 200 Nm (constant). On dit que cette zone est en ***flexion pure*** car elle n'est sollicitée que par le moment fléchissant.

Si, à une section donnée d'une poutre, le moment fléchissant ***M*** ainsi que l'effort tranchant ***V*** ne sont pas nuls ($V \neq 0$ et $M \neq 0$), la poutre est en flexion simple ou ordinaire.

Une poutre sollicitée en flexion pure est soumise seulement à des contraintes normales (tension et compression) car en fléchissant (pliant) une partie des fibres de la poutre (supérieures ou inférieures) est soumise à de la compression et l'autre partie à de la tension.

Tandis qu'une poutre sollicitée en flexion simple est soumise aussi à des contraintes normales mais aussi à des contraintes de cisaillement (dû à l'effort tranchant).

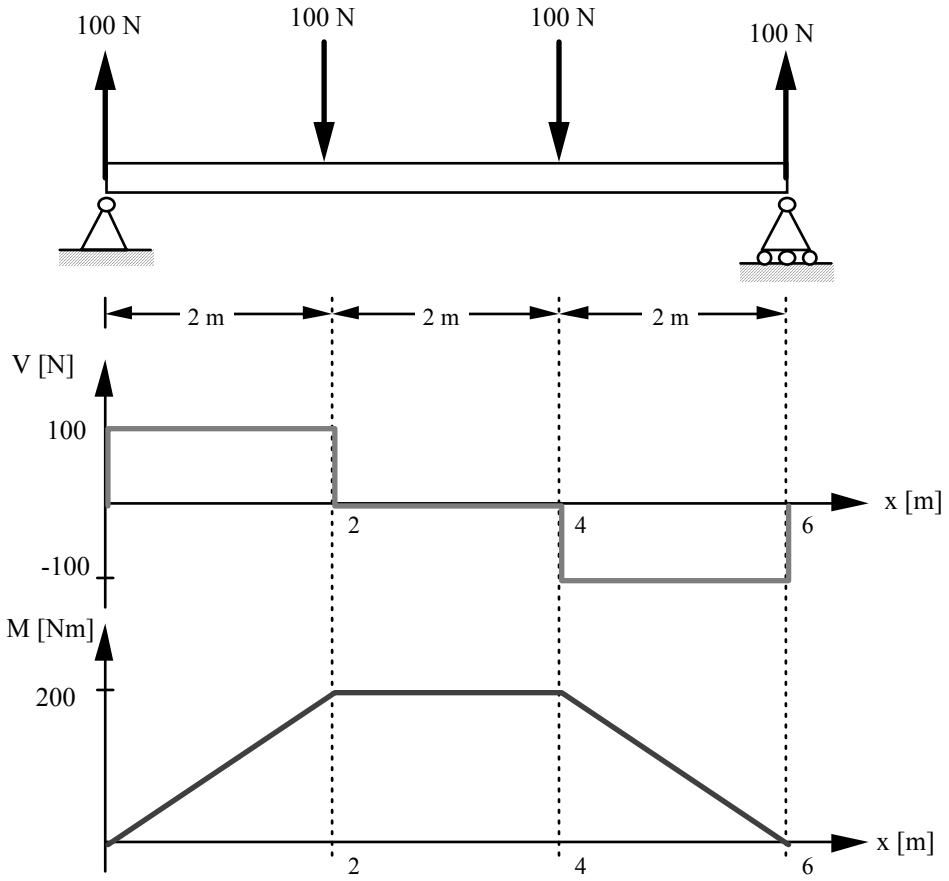

Fig. 9.1

Dans la portion 2 à 4 m, de la *figure 9.1*, le moment fléchissant a tendance à faire fléchir (plier) la poutre vers le bas, de telle sorte que les fibres inférieures de la poutre sont sollicitées en tension tandis que les fibres supérieures sont sollicitées en compression. Il n'y a pas d'autres efforts que ceux-ci dans cette section. La *figure 9.2* montre qu'on peut assimiler le moment de flexion à deux efforts de tension et de compression.

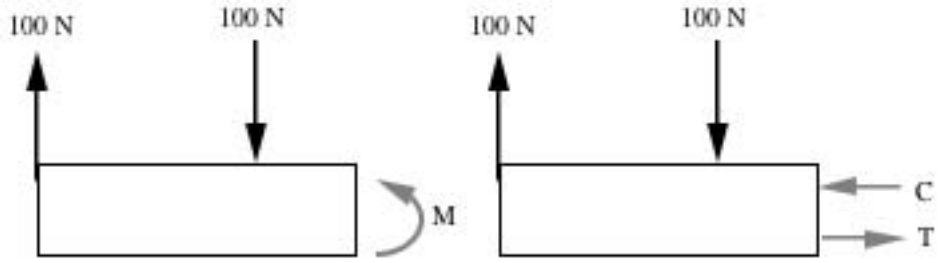

Fig. 9.2

Isolons une petite portion en flexion pure de la poutre montrée et exagérons la flexion pour mieux illustrer les spécifications.

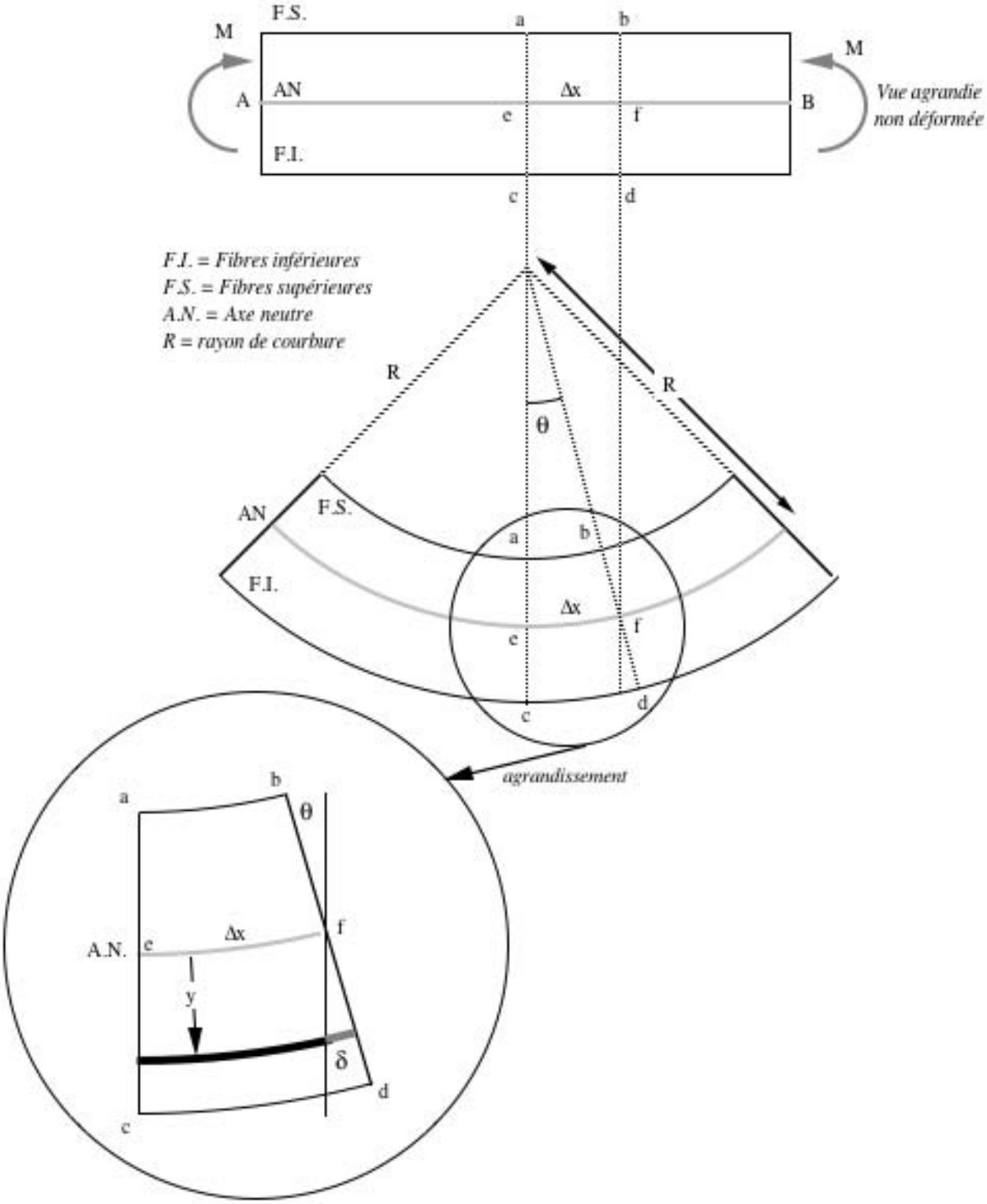
F.S.
M
a
b
M
AN
Δx
A
B
Vue agrandie
non déformée
e
f
F.I.
c
d
F.I. = Fibres inférieures
F.S. = Fibres supérieures
A.N. = Axe neutre
R = rayon de courbure
R
R
θ
AN
F.S.
a
b
F.I.
Δx
f
e
c
d
agrandissement
a
b
θ
A.N.
e
Δx
f
y
δ
d
c

Fig. 9.3

Pendant la flexion, les ***fibres supérieures*** se ***compriment*** et les ***fibres inférieures*** se ***tendent***, tandis que l'axe neutre ne change pas de longueur. La compression ou l'allongement des fibres est proportionnel à leur distance de l'axe neutre. Ici, pour les besoins de la démonstration nous avons exagéré la courbure, mais en réalité, la poutre ne subit pas une flexion aussi grande.

Le rayon de courbure **R** est très grand et l'angle qu'on mesure θ est très très petit. Si on mesure **θ** en radian on peut affirmer à partir de la définition du radian que:

$$\theta = \frac{\text{longueur de l'arc}}{\text{rayon}} = \frac{^2x}{R} = \frac{\delta}{y}$$

D'où on peut tirer:

$$\boldsymbol{\delta = y\theta} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\Delta x = R\theta}$$

En considérant que Δx à l'axe neutre ne change pas de dimensions, nous pouvons définir la déformation unitaire par:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{^2x} = \frac{y\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

Et selon la loi de Hooke (**σ = E ε**), on a:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{^2x} = \frac{\sigma}{E}$$

d'où

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{E\,y}{R}} \qquad \textit{(9.1)}$$

Donc la contrainte est proportionnelle à l'éloignement de l'axe neutre, *plus on s'éloigne de part et d'autre de l'axe neutre, plus la contrainte est grande*.

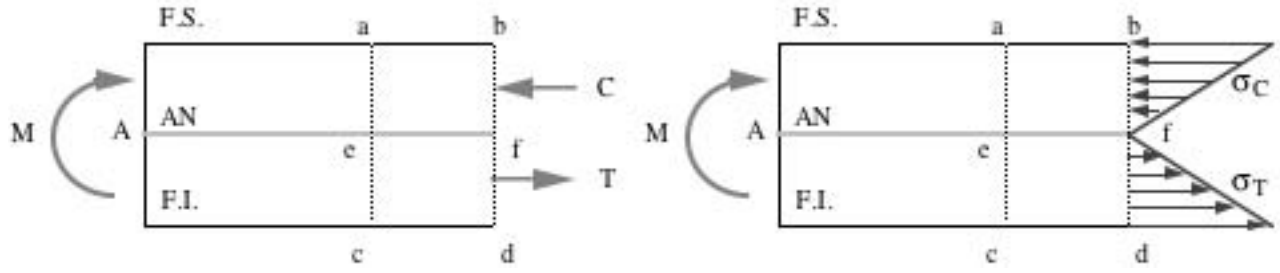

Fig. 9.4

Si on veut maintenant calculer le moment interne total, il faut calculer le moment de chaque élément pris séparément.

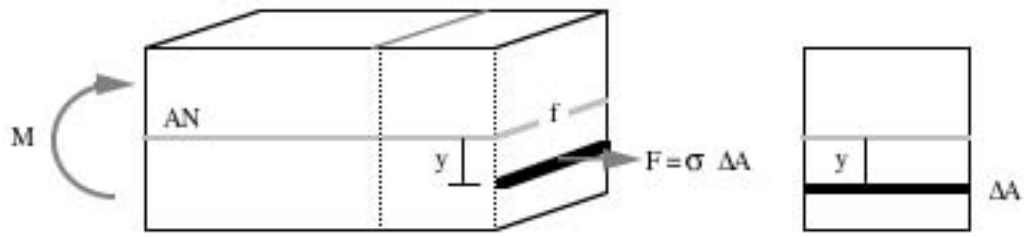

Fig. 9.5

Ainsi, l'élément de moment $\Delta \mathbf{M_f}$ par rapport à **"f"** d'un élément de surface $\Delta \boldsymbol{A}$, situé à $\boldsymbol{y}$ de l'axe neutre sera:

$$\Delta M_f = (\text{force}) \times (\text{bras de levier}) = (\sigma\ \Delta A) \times (y)$$

Et nécessairement: $\sum M_f = \sum \sigma\ \Delta A y = M$

Remplaçons **σ** par la valeur que nous avons trouvé précédemment (**σ = Ey/R**); nous aurons:

$$\square M_f = \frac{E\ y\ ^2 A\ y}{R} = \frac{E}{R}\ \square^2 A\ \ y^2 = M$$

Si on se réfère au chapitre 9, $\sum \Delta \boldsymbol{A y^2 = I}$ ***(9.3)***, moment d'inertie de la section. Donc:

$$M = \frac{E\ I}{R} \qquad \textit{(9.2)}$$

Malheureusement on ne connait pas le rayon de courbure R mais on sait par contre que ***(9.1)***:

$$\sigma = \frac{E\ y}{R}$$

D'où $$R = \frac{E\ y}{\sigma}$$

Qui inséré, dans la relation ***(9.2)*** nous donne:

$$M = \frac{E\ I\ \sigma}{E\ y} = \frac{I\ \sigma}{y}$$

Et finalement, en isolant σ de l'équation précédente, que l'on appelle $\boldsymbol{\sigma_f}$ du fait qu'elle provient de la flexion, on obtient:

$$\boldsymbol{\sigma_f = \frac{M\,y}{I}} \qquad \textit{(9.3)}$$

<u>Si la poutre n'est pas symétrique</u>:

par exemple si $y_T > y_C$

$$\sigma_{fC} = \frac{M\,y_C}{I} \qquad \sigma_{fT} = \frac{M\,y_T}{I}$$

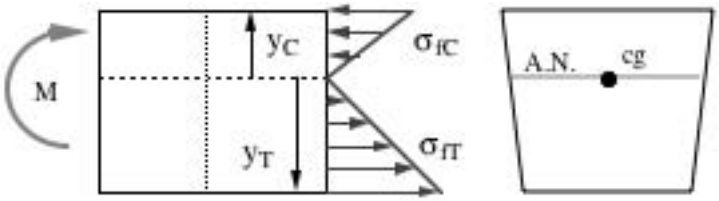

Fig. 9.6

La contrainte maximale en compression est plus petite que la contrainte maximale en tension ($\sigma_{fT} > \sigma_{fC}$). On voit donc que la contrainte est maximale sur la fibre la plus éloignée. *Pour vérifier la capacité d'une poutre*, il s'agit de calculer la ***contrainte maximum*** à l'endroit où elle subit le ***moment de flexion maximum***.

<u>Si la poutre est symétrique</u>:

$y_T = y_C$

$$\sigma_{fC} = \frac{M\,y_C}{I} \qquad \sigma_{fT} = \frac{M\,y_T}{I}$$

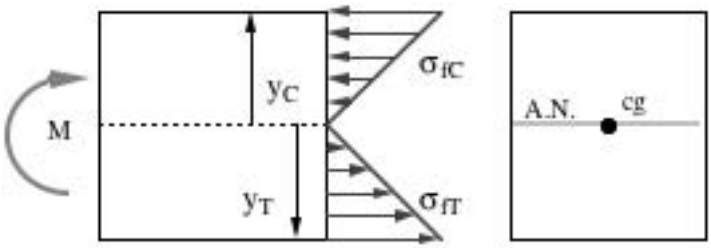

Fig. 9.7

La contrainte maximale en compression est égale à la contrainte maximale en tension ($\sigma_{fT} = \sigma_{fC}$). Or lorsque les poutres sont symétriques, leur moment d'inertie divisée par la distance de l'axe neutre à l'extrémité est égal au module de section (voir chap. 9) => ***S = I/y*** ***(9.5)*** d'où:

$$\boldsymbol{\sigma_f = \frac{M}{S}} \qquad \textit{(9.4)}$$

L'équation de la contrainte a été démontrée en se servant d'une partie de poutre où le moment de flexion était constant. *<u>L'équation</u> est cependant <u>valable</u> même si le <u>moment de flexion varie constamment</u> en se déplaçant sur la poutre.* On pourrait refaire la démonstration en se servant d'une partie très courte d'une poutre à moment variable et le résultat serait le même.

Contrainte normale en flexion:

si la poutre est symétrique:

$$\sigma_f = \frac{M}{S} \qquad (9.4)$$

n'importe quelle poutre:

$$\sigma_f = \frac{M\,y}{I} \qquad (9.3)$$

où: **M:** Moment de flexion maximum (valeur absolue)
S: Module de section = I/y
y: Distance de l'axe neutre à l'extrémité la plus éloignée de la section.
I: Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre.

EXEMPLE 9.1: *Calculer la contrainte normale maximale dans une poutre rectangulaire ayant une base de 2 cm et une hauteur de 4 cm et étant soumise à un moment de flexion maximal de 2000 Nm.*

Solution:

Ici comme l'axe neutre est symétrique, on a, en se référant dans les tableaux du chapitre précédant, la valeur du module de section d'une section triangulaire: $S = bd^2/6$.

$$S = \frac{(2\text{ cm}) \times (4\text{ cm})^2}{6} = 5{,}33\ \text{cm}^3$$

Donc:

$$\sigma_f = \frac{M}{S} = \frac{2\,000\text{ Nm}}{5{,}33\ \text{cm}^3}\left[\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right]^3 = 375\ \textbf{MPa}$$

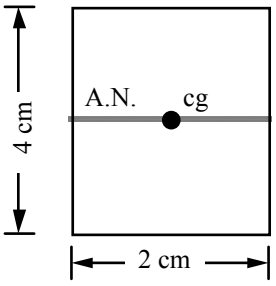

Fig. 9.8

EXEMPLE 9.2*:* *Trouver la contrainte normale en flexion (maximale) dans la poutre ci-dessous.*

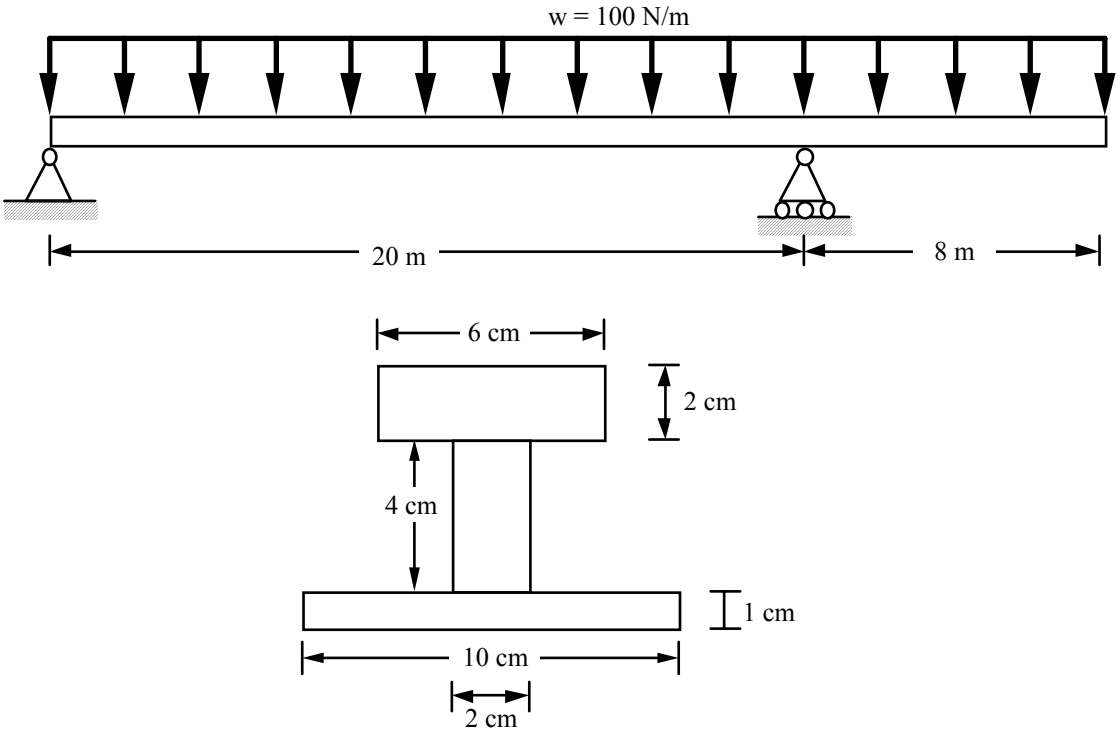

Fig. 9.9

Solution:

1) Calculons les réactions d'appuis.

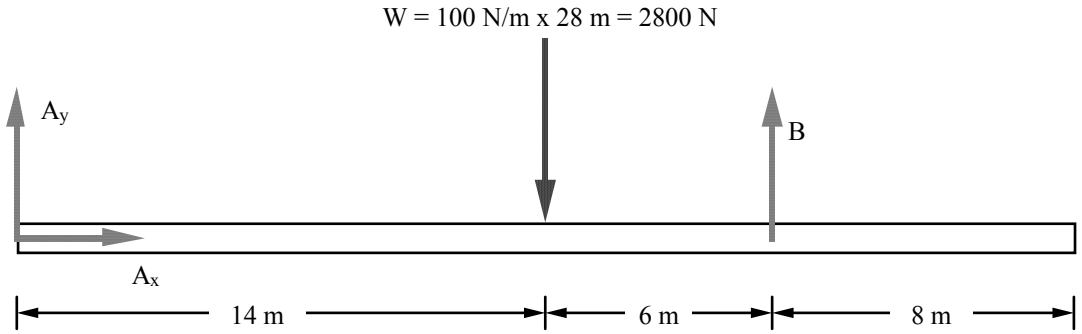

Fig. 9.10

$\sum F_x = \mathbf{A_x = 0}$

$\sum M_A = -(2800 \times 14) + (B \times 20) = 0$ D'où **B = 1960 N**

$\sum F_y = A_y - 2800 + 1\,960 = 0$ D'où $\mathbf{A_y = 840\ N}$

2) Traçons maintenant V et M afin de trouver le **M maximum.**

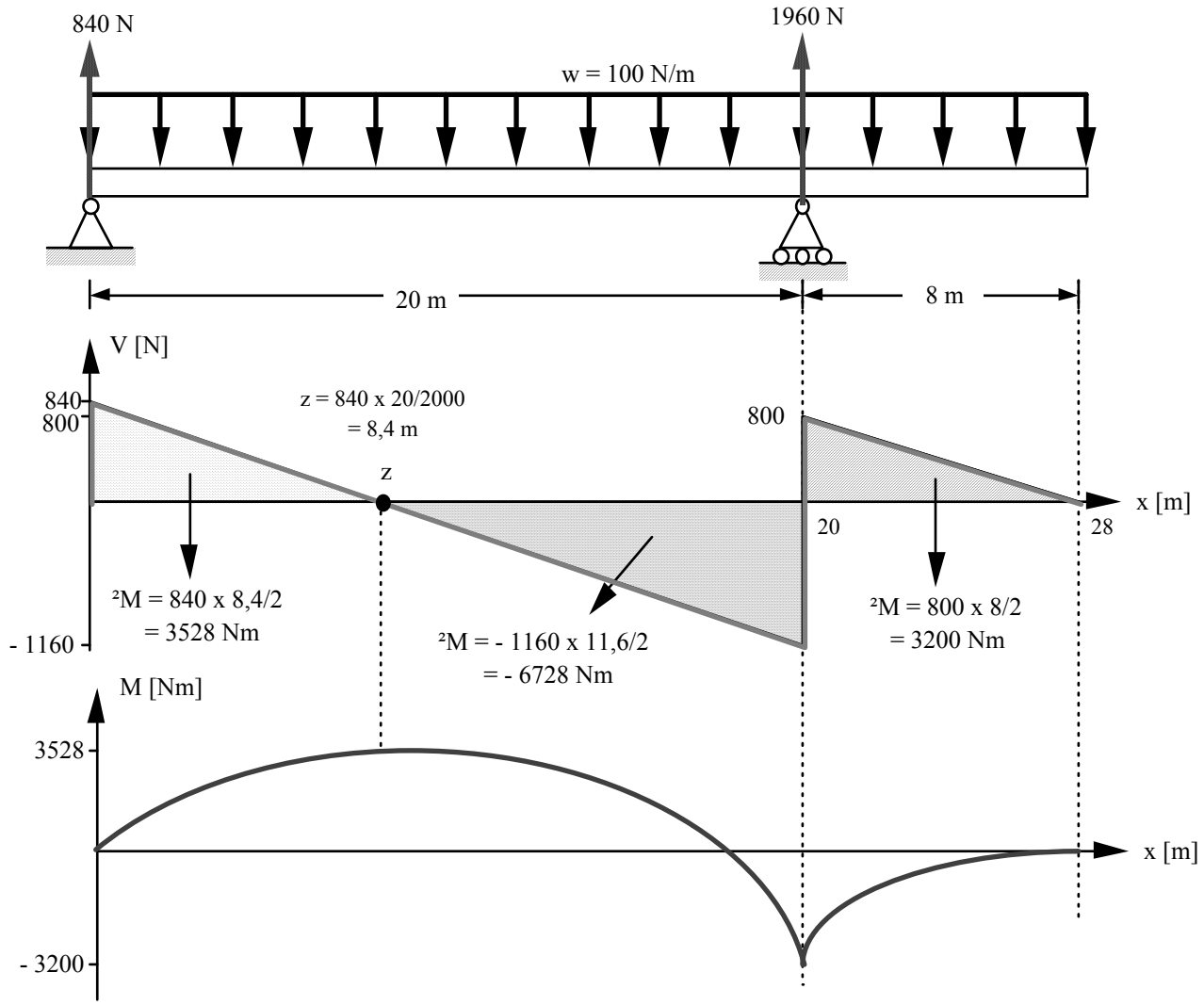

Fig. 9.11

Donc $\mathbf{M_{max} = 3528\ Nm}$

3) trouvons l'axe neutre de la section:

$A_1 = 2\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$

$A_2 = 2\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$

$A_3 = 1\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 10\text{ cm}^2$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 30\text{ cm}^2$

$\sum Q_z = (12 \times 1) + (8 \times 4) + (10 \times 6{,}5) = 30 \times t$

D'où **t = 3,63 cm**

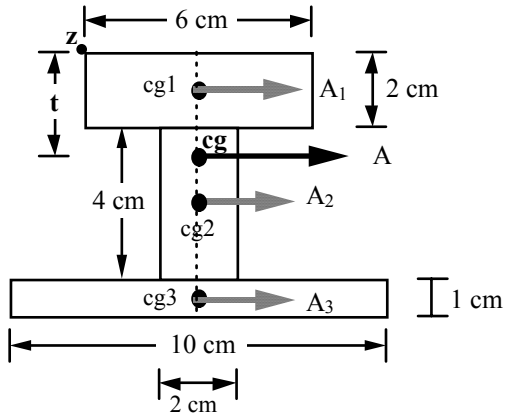

Fig. 9.12

Donc l'axe neutre est situé à 3,63 cm du haut; ce qui revient à **7 - 3,63 = 3,37 cm** de la base. Ce qui nous donne ***y = 3,63 cm*** comme distance la plus éloignée de l'axe neutre. On est au-dessus de l'AN et M > 0 donc la contrainte sera **compressive**.

4) calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre:

$$I_1 = \frac{(6\text{ cm} \times (2\text{ cm})^3)}{12} + ((12\text{ cm}^2)(2{,}63\text{ cm})^2)$$

$$= 4\text{ cm}^4 + 83{,}21\text{ cm}^4 = \mathbf{87{,}21\text{ cm}^4}$$

$$I_2 = \frac{(2\text{ cm} \times (4\text{ cm})^3)}{12} + ((8\text{ cm}^2)(0{,}3666\text{ cm})^2)$$

$$= 10{,}666\text{ cm}^4 + 2{,}933\text{ cm}^4 = \mathbf{13{,}6\text{ cm}^4}$$

$$I_3 = \frac{(10\text{ cm} \times (1\text{ cm})^3)}{12} + ((10\text{ cm}^2)(2{,}867\text{ cm})^2)$$

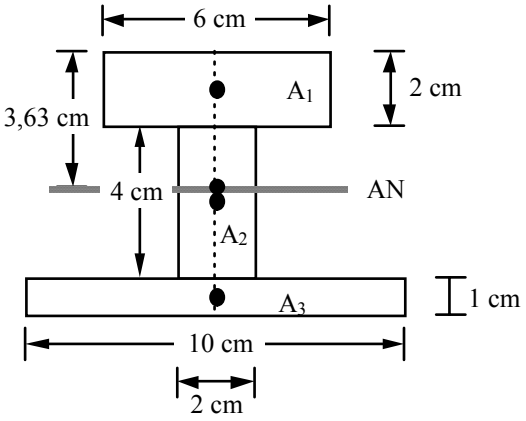

Fig. 9.13

$$= 0{,}833\text{ cm}^4 + 82{,}178\text{ cm}^4 = \mathbf{83{,}01\text{ cm}^4}$$

$$\mathbf{I_T} = I_1 + I_2 + I_3 = 87{,}21\text{ cm}^4 + 13{,}6\text{ cm}^4 + 83{,}01\text{ cm}^4 = \mathbf{183{,}8\text{ cm}^4}$$

5) Calculons la contrainte normale (en compression):

$$\sigma_f = \frac{M\,y}{I} = \frac{3528\text{ Nm } 3{,}6333\text{ cm}}{183{,}8\text{ cm}^4}\left[\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right]^3 = 69{,}73\ \mathbf{MP}\text{ a}$$

Contrainte en cisaillement : Voir notes de cours

EXEMPLE 9.3: *Calculer la contrainte normale ainsi que la contrainte en cisaillement maximum causées par la flexion de la poutre ci-dessous.*

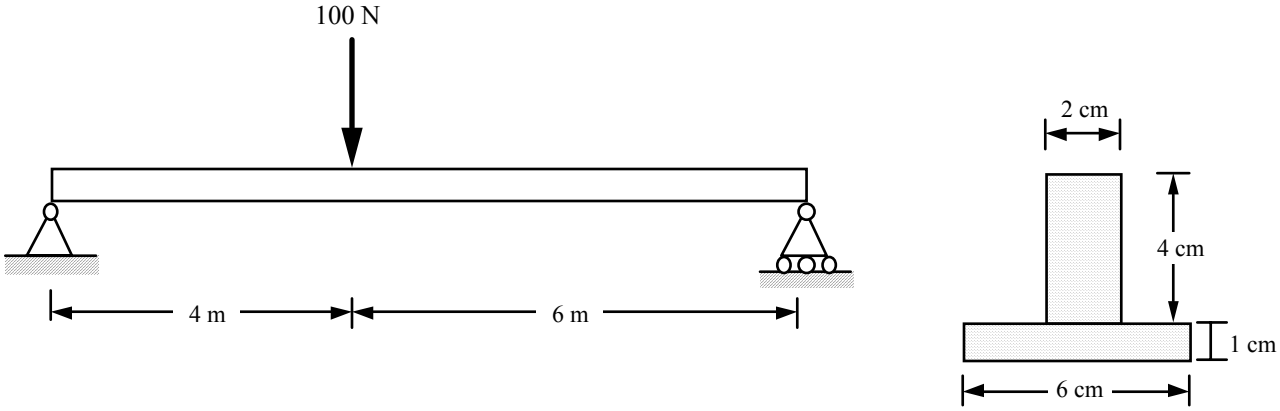

Fig. 9.22

Solution:

Si on observe attentivement, la poutre simple est sollicitée par une seule charge comme illustrée dans la démonstration de la flexion ordinaire *figures 9.15 et 9.16* p.166-167. On peut se servir de graphiques de ce genre afin d'établir des graphiques "<u>standard</u>" pouvant être utilisés directement. Ainsi ici,

a = 4 m et b = 6 m

A = P b/(a+b) = 100 N 6 m/(4 m + 6 m) = 600 N m/10 m = **60 N**

B = P a/(a+b) = 100 N 4 m/(4 m + 6 m) = 400 N m/10 m = **40 N**

Donc $\mathbf{V_{max} = 60\ N}$

et $\mathbf{M_{max}}$ = P a b/(a+b) = 100 N 4 m 6 m/(4 m + 6 m) = 2400 Nm^2/10 m = **240 Nm**

Calculons maintenant le moment d'inertie. Pour ce, on a besoin de trouver le centroïde.

$$\sum Q_z = (8\ cm^2\ 2\ cm) + (6\ cm^2\ 4{,}5\ cm) = 14\ cm^2\ c$$

D'où $c = \dfrac{43\ cm^3}{14\ cm} = 3{,}07\ cm$

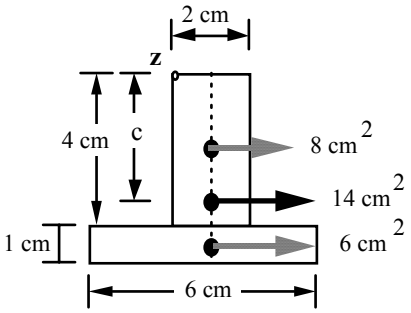

Fig. 9.23

Donc pour le moment d'inertie:

$$I_{AN} = I_{AN1} + A_1 s_1^2 + I_{AN2} + A_2 s_2^2$$

$$I_{AN} = \frac{2 \times 4^3}{12} + 8\ (3{,}07 - 2)^2 + \frac{6 \times 1^3}{12} + 6\ (4{,}5 - 3{,}07)^2$$

$$I_{AN} = 32{,}60\ \text{cm}^4$$

On peut maintenant calculer σ_f

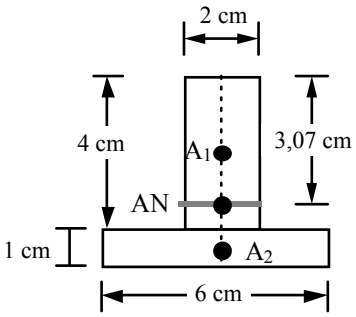

Fig. 9.24

$$\boldsymbol{\sigma_f} = \frac{M\ y}{I} = \frac{240\ \text{Nm}\ 3{,}07\ \text{cm}}{32{,}6\ \text{cm}^4} \left[\frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right]^3 = 22{,}6\ \textbf{MPa}$$

Comme M = 240 Nm, donc positif et que la partie la plus éloignée est située au-dessus de l'AN, les fibres supérieures sont donc en compression et la contrainte de flexion est compressive.

9.2.2 Considérations pratiques

À l'aide des relations démontrées précédemment, on peut calculer, selon le cas, la contrainte normale de flexion σ et la contrainte de cisaillement τ_L en tout point d'une section de poutre, à condition de connaître évidemment le moment fléchissant et l'effort tranchant à cette section.

> Dans la plupart des cas, seules les valeurs maximales des contraintes sont prises en considération. La *contrainte normale maximale* σ_{max} est calculée à la fibre *la plus éloignée de l'axe neutre* et à la section du *moment fléchissant maximum*. Tandis que la *contrainte maximale de cisaillement* (longitudinale) τ_{Lmax} (L = pour longitudinale) est obtenue à l'axe neutre et à la section où l'*effort tranchant est maximum*.

En pratique, dans les calculs simplifiés des poutres en acier (profilé en H, C, L, T , ...), il est sécuritaire de supposer que l'**âme** de la poutre supporte à peu près tout l'**effort tranchant** tandis que ses ailes ou semelles offrent peu de résistance au cisaillement.

Ainsi, pour déterminer la **contrainte moyenne de cisaillement transversal et longitudinal** dans les poutres en acier, on considère qu'elles ont une **section droite rectangulaire** dont la *largeur est égale à l'épaisseur de l'âme et la hauteur égale à celle de la poutre.*

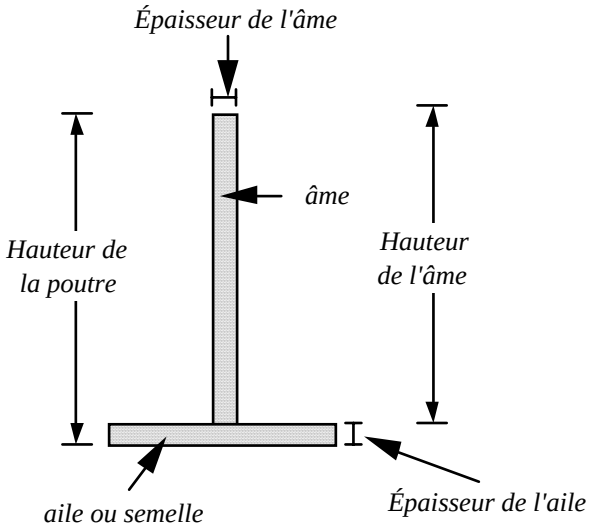

Fig. 9.27

Par contre, on peut dire que les **ailes ou semelles** des poutres résistent principalement au **moment fléchissant** et que leur âme ne prend qu'une part secondaire à sa résistance.