
POUTRE: EFFORT EN FLEXION

7.1 INTRODUCTION

Une *poutre* est une membrure mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines.

En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre. On appelle *effort tranchant* (V) la force interne transversale et *moment fléchissant* (M) le moment interne. Dans ce chapitre, nous étudierons ces forces et ces moments; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone à l'autre le long de la poutre et où sont situées les zones les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

On définit la poutre:

Une membrure qui supporte des charges perpendiculairement à son axe longitudinal et qui les transmet à des appuis situés le long de son axe.

7.1.1 Types de poutres

Une poutre est une barre d'une charpente, une membrure d'une structure, ou un élément d'une machine. Les poutres sont placées dans la position **horizontale** et supportent des charges. Les charges sur les poutres tendent à les trancher (cisailer) et à les courber ou plier.

A Poutre simple

C'est une poutre reposant sur **deux** supports; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion. La *figure 7.1* montre une poutre simple.

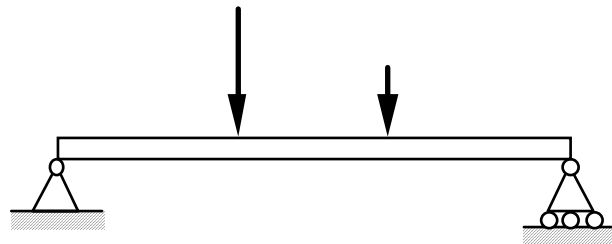


Fig. 7.1

B Poutre console

C'est une poutre encastée dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastée à une extrémité. La *figure 7.2* montre une poutre console.

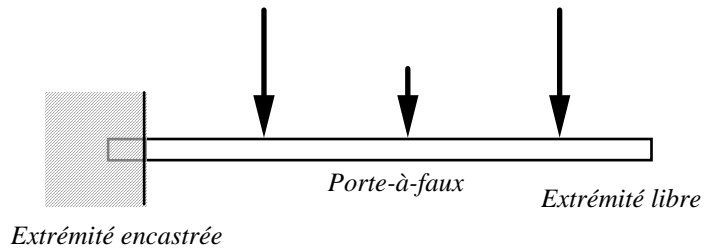


Fig. 7.2

C Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur **deux** appuis (un simple et l'autre double) et a **une** ou **deux** extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (*porte-à-faux*). On appelle aussi cette poutre; poutre en porte-à-faux d'extrémité (*overhanging*). La *figure 7.3* montre une poutre avec porte-à-faux.

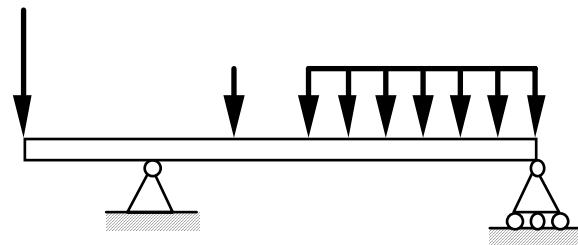


Fig. 7.3

Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutre statiquement déterminées (poutre **isostatique**). Car ces poutres possèdent **trois** inconnues reliées aux **trois** degrés de liberté et par le fait même aux **trois** équations d'équilibre.

Équilibre de translation:

- | | | |
|---|----------------|-------------------------|
| ① | $\sum F_x = 0$ | translation horizontale |
| ② | $\sum F_y = 0$ | translation verticale |

Équilibre de rotation:

$$\textcircled{3} \quad \sum M_z = 0$$

rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire au plan des forces xy.

D Poutre encastree et supportee

C'est une combinaison des types A et B. On note que la poutre est liée **quatre** fois (4 inconnues), c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La *figure 7.4* nous montre une poutre encastree et supportee.

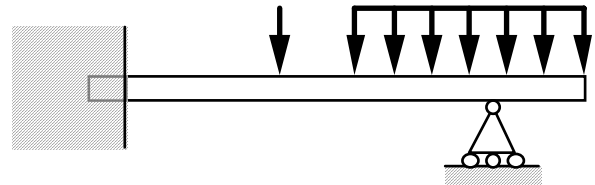


Fig. 7.4

E Poutre continue

C'est une poutre supportee par **plus** de **deux** supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La *figure 7.5* nous montre une poutre continue.

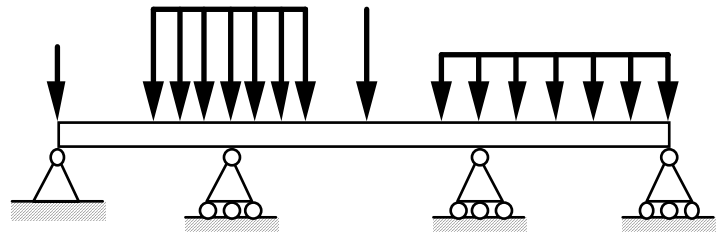


Fig. 7.5

F Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportee par **deux** encastrement, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La *figure 7.6* nous montre une poutre à double encastrement.

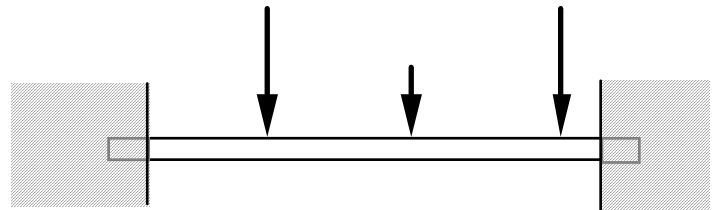


Fig. 7.6

G Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre soutenue par **deux** encastrement et supportée par **un** ou **plusieurs** supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La *figure 7.7* nous montre une poutre supportée à double encastrement.

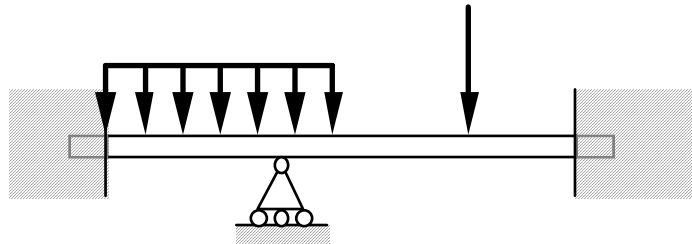


Fig. 7.7

Les poutres **D à G** sont des poutres hyperstatiques. Elles ont plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations de la statiques ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes méthodes.

7.1.2 Types de charges

A Charge concentrée

Une charge concentrée est une charge qui s'étend sur une distance relativement très courte de la poutre, de sorte que l'on puisse considérer que cette charge agit en un point, sans erreur appréciable. Une colonne de béton supportée par une poutre reposant sur deux poteaux d'acier, est un exemple d'une charge concentrée.

On considère également que les réactions des poteaux agissent en des points situés aux centres de ces poteaux, même si la longueur d'appui est la largeur du poteau.

La situation de la *figure 7.8 (a)* est donc représentée symboliquement par la *figure 7.8 (b)*, où P (poids de la colonne) est une charge concentrée, tandis que A et B sont des réactions d'appuis concentrées.

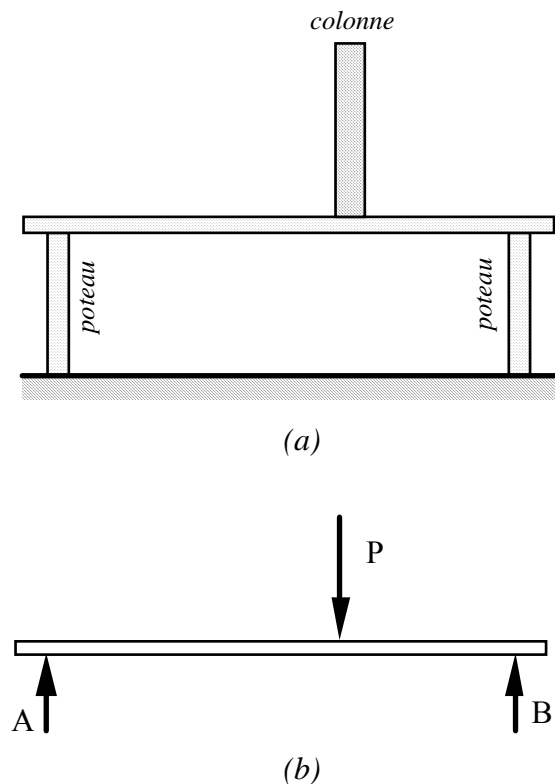


Fig. 7.8

B Charge uniformément répartie

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme, c'est-à-dire la charge sollicitante par unité de longueur " w " [N/m] de la poutre est constante. Le poids de la poutre, lui aussi, est une charge uniformément répartie sur toute sa longueur. La *figure 7.9* montre une charge distribuée (mur de béton) sur une poutre.

La charge totale " W " de cette charge distribuée est le produit (aire de la charge: base (x) x hauteur (w)) de la charge linéaire par la longueur ($w x$) et est appliquée au centre ($x/2$) de cette distribution.

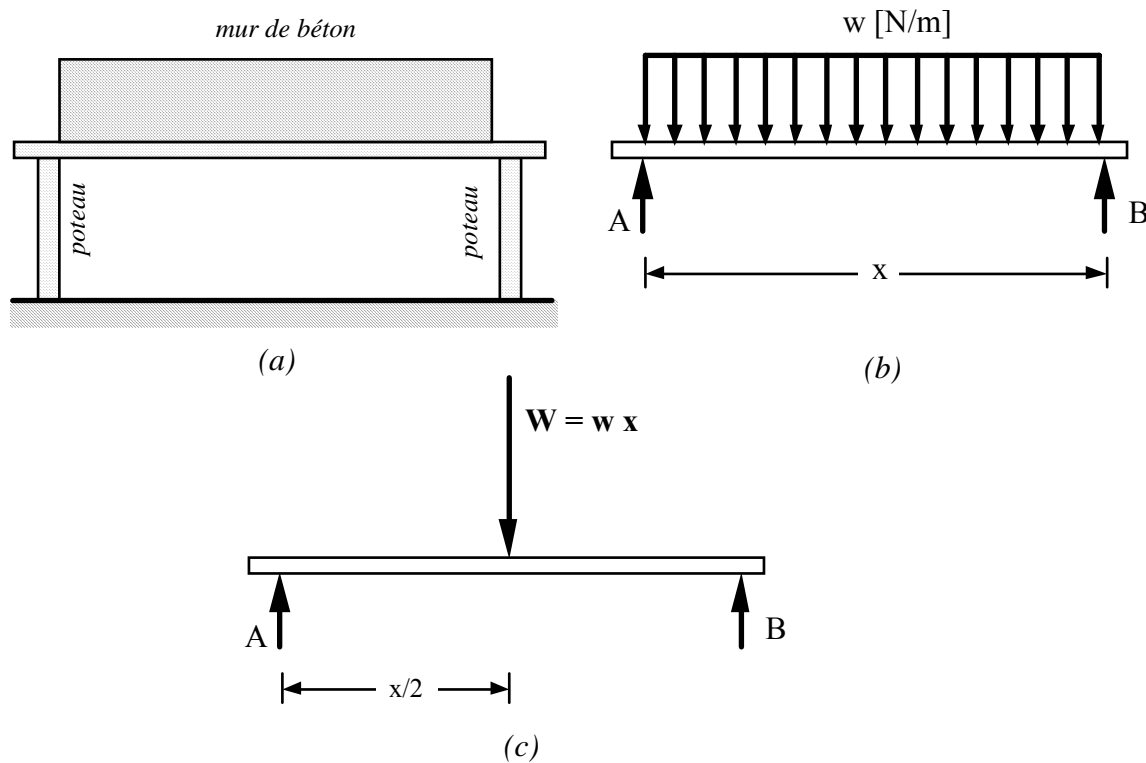


Fig. 7.9

C Charge non uniformément répartie

Il existe plusieurs types de charges non uniformément réparties, la plus souvent rencontrée est la charge triangulée. Un peu comme la charge uniformément répartie, la charge totale d'une charge triangulée est donnée par "l'aire de la charge", c'est-à-dire base (x) x hauteur (w) divisée par 2 (aire d'un triangle) ($w x/2$) et est appliquée au centre de la distribution (comme pour un triangle) $2x/3$. La *figure 7.10* montre une charge triangulée.

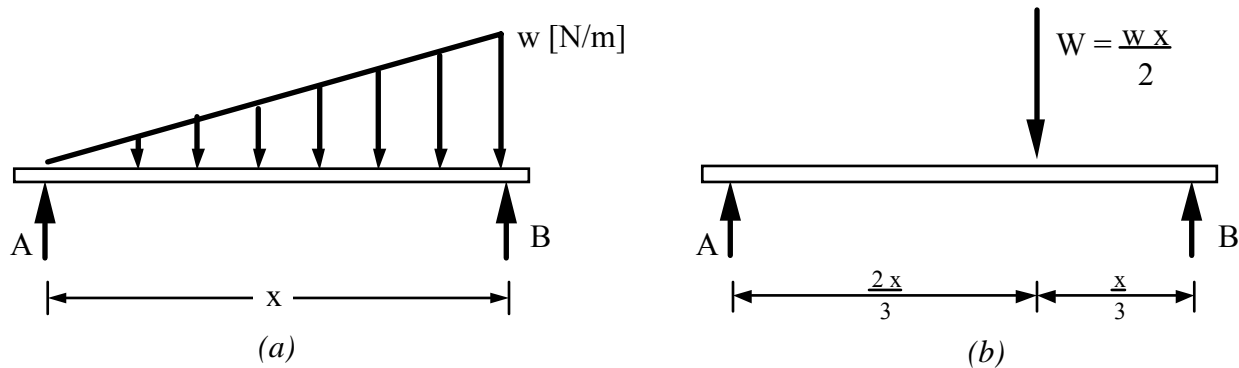


Fig. 7.10

Il existe aussi d'autres formes de charges distribuées non uniformes. Le principe est le même; la charge totale équivaut à l'*aire* de la figure géométrique représentée et l'application se fait au *centre géométrique* de celle-ci. La *figure 7.11* en illustre quelques autres charges non uniformément réparties.

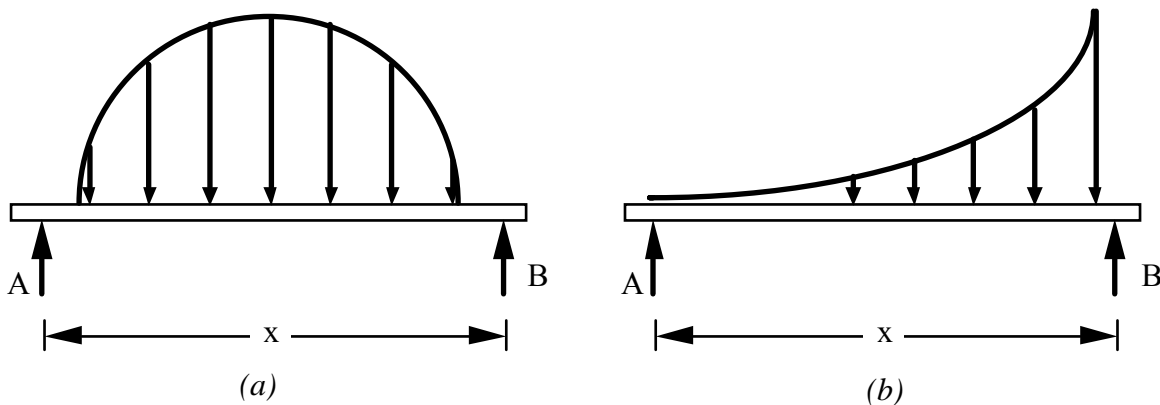


Fig. 7.11

D Couples

On rencontre aussi des couples de forces dans une poutre, ces couples tendent à courber la poutre. ils modifient donc les moments de flexions des poutres. la *figure 7.12* montre un couple appliqué sur une poutre.

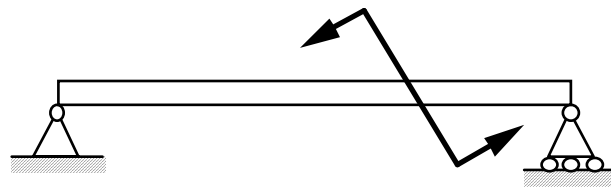


Fig. 7.12

Dans les charges concentrées, il y a aussi les charges axiales et les charges obliques ou inclinées par rapport à l'axe. Dans la pratique, on peut rencontrer l'un ou l'autre des types de charges ou une combinaison de plusieurs types de charges. Il est bon de pouvoir les reconnaître et les identifier.

7.2 DIAGRAMMES DE V ET DE M

7.2.1 Généralités

Dans le plan, il y a trois degrés de liberté; c'est-à-dire trois types de mouvements possibles:

←	translation dans la direction de l'axe de la poutre (horizontale)
↑	translation perpendiculairement à l'axe de la poutre (verticale)
→	rotation.

Pour qu'une poutre en équilibre statique soit liée complètement, il faut empêcher ces trois mouvements par trois forces non concourantes. Lorsqu'une poutre est en équilibre, chacune de ses parties est aussi en équilibre. Il faut donc que les efforts internes au point de coupe soient en mesure de restreindre les trois degrés de liberté. Ces efforts sont:

N	->	Effort normal (empêchant tout mouvement horizontal)
V	->	Effort tranchant (empêchant tout mouvement vertical)
M	->	Moment de flexion (empêchant la rotation)

L'effort normal représente la transmission des efforts axiaux à l'articulation ou à l'encastrement.

L'effort tranchant représente les transmissions intégrales des charges aux appuis.

Le moment de flexion dépend de la position des charges et de l'écartement des appuis. C'est le seul effort qui dépend de la longueur de la poutre.

On calcul ces efforts en appliquant les équations d'équilibre:

Équilibre de translation:

horizontal	$\sum F_x = 0$	①
------------	----------------	---

vertical	$\sum F_y = 0$	②
----------	----------------	---

Équilibre de rotation:

	$\sum M_z = 0$	③
--	----------------	---

7.2.2 Recherche des efforts en tout point d'une poutre

Afin de pouvoir tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants, il faut connaître en tout point de la poutre quelles sont les valeurs de ces efforts et moments. Pour ce, on doit effectuer des coupes dans la poutre afin d'appliquer les équations d'équilibre nous permettant de connaître tous les efforts. La figure suivante illustre un cas exagéré de charges s'appliquant sur une poutre, dans cet exemple il faut effectuer plusieurs coupes afin de trouver les efforts tranchants et les moments fléchissants en tout point.

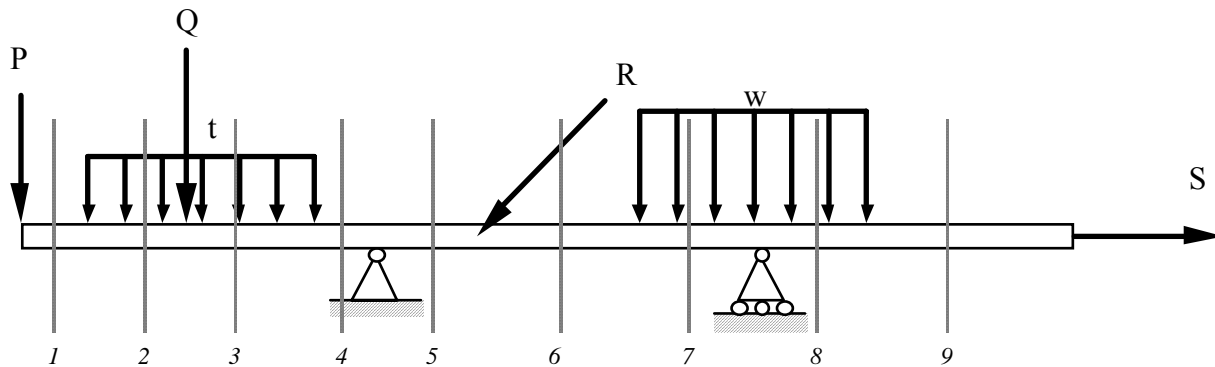


Fig. 7.13

Règle à suivre:

- 1- On se déplace sur la poutre de gauche à droite et on effectue une coupe chaque fois que les conditions de charge changent. C'est-à-dire que l'on effectue une coupe à chaque nouvelle charge. **On ne coupe jamais vis-à-vis une charge.**
- 2- Il y a changement en entrant dans la poutre, après une charge concentrée ou réaction d'appui, en entrant dans une charge répartie, en rencontrant une charge concentrée dans une charge distribuée, en quittant une charge distribuée.

Dans l'exemple précédent, on doit effectuer 9 coupes. Les 9 coupes s'expliquent ainsi,

- coupe:
- 1- On entre dans la poutre et on rencontre une charge "P" donc une coupe (on aurait fait la coupe même si la charge P n'y était pas car on effectue toujours une coupe en entrant dans une poutre).
 - 2- On entre dans la charge distribuée "t", une coupe.

- 3- On rencontre une charge concentrée "Q" dans la charge distribuée "t", une coupe.
- 4- On sort de la charge distribuée "t", une coupe.
- 5- On rencontre une charge concentrée, la réaction d'appui, une coupe.
- 6- On rencontre une charge concentrée "R", une coupe.
- 7- On entre dans la charge distribuée "w", une coupe.
- 8- On rencontre une charge concentrée, la réaction d'appui, dans la charge distribuée, une coupe.
- 9- On sort de la charge distribuée "w", une coupe.

Il est extrêmement important d'effectuer ce travail, car s'il nous manque une coupe, on peut passer à côté des conditions limites, à savoir les efforts maximums dans la poutre. Une étude approfondie des charges installées sur une poutre est essentielle.

7.2.3 Convention de signes

A Effort normal (ou axial) N

On place toujours l'effort normal en *tension* sur la coupe. Et si:

$N > 0$ (ou positif (+)); on a une *tension*. (fig. 7.14 (a))
 $N < 0$ (ou négatif (-)); on a une *compression*. (fig. 7.14 (b))

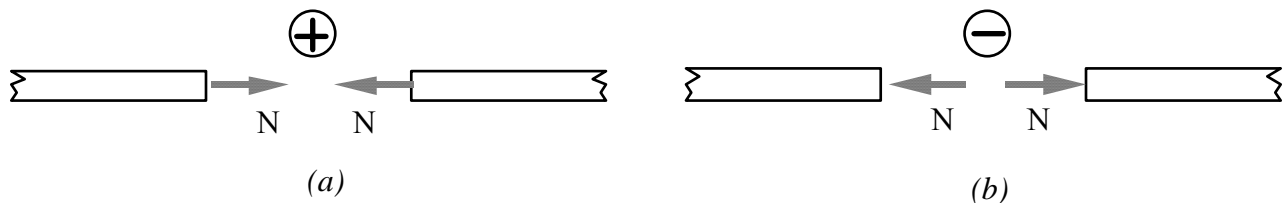


Fig. 7.14

B Effort tranchant (ou de cisaillement) **V**

$V > 0$ (ou positif (+));	si la somme des forces externes (ΣF_{ext}) sur la partie de gauche isolée de la poutre agit vers le haut. (fig. 7.15 (a))
$V < 0$ (ou négatif (-));	si la somme des forces externes (ΣF_{ext}) sur la partie de gauche isolée de la poutre agit vers le bas. (fig. 7.15 (b))

La somme des forces externes (ΣF_{ext}) est la sommation de toutes les charges et/ou réactions d'appuis qui s'exercent sur la section de la poutre que l'on conserve. On remarque que si on conserve la partie de droite au lieu de celle de gauche, le sens de V est inversé (action-réaction).

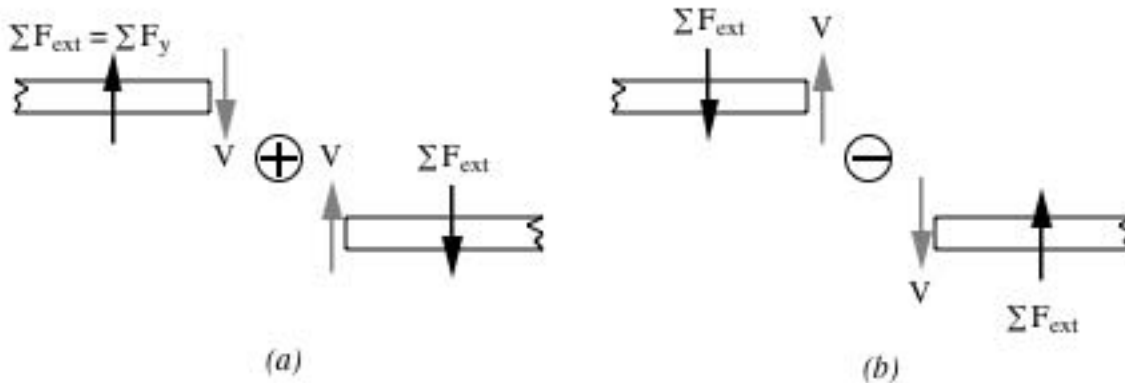


Fig. 7.15

C Moment fléchissant (ou de flexion) **M**

$M > 0$ (ou positif (+));	si les charges et réactions d'appuis tendent à courber la poutre de sorte que les fibres inférieures soient tendues. (fig. 7.16 (a))
$M < 0$ (ou négatif (-));	si les charges et réactions d'appuis tendent à courber la poutre de sorte que les fibres supérieures soient tendues. (fig. 7.16 (b))

Cette convention est basée sur le comportement d'une poutre simple et celle des efforts tranchants découle de celle de M .

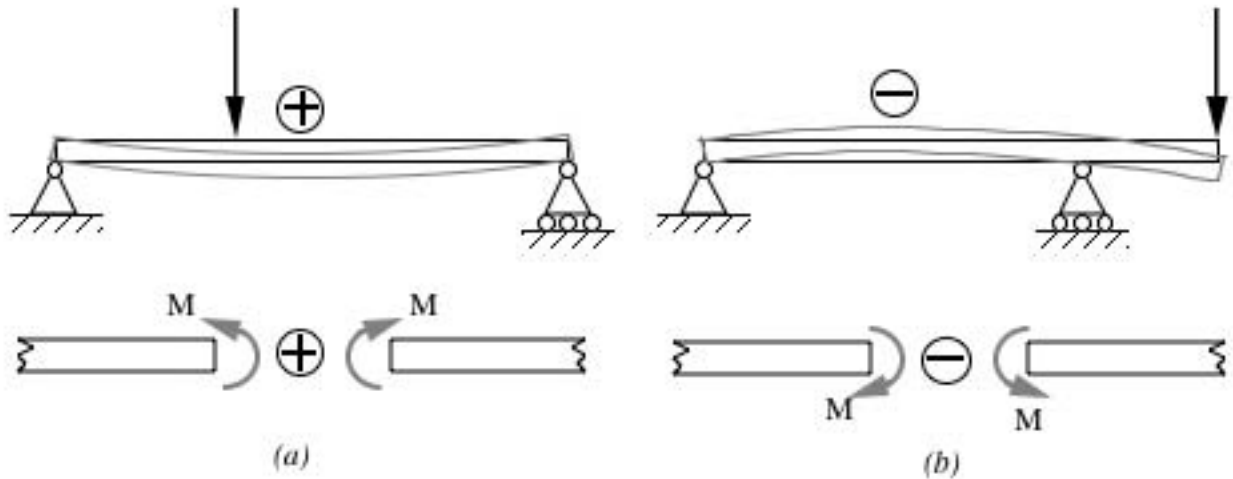


Fig. 7.16

Lorsque l'on effectue une coupe, on utilise toujours ces conventions de signes afin d'éviter toutes erreurs d'interprétation.

En résumé:

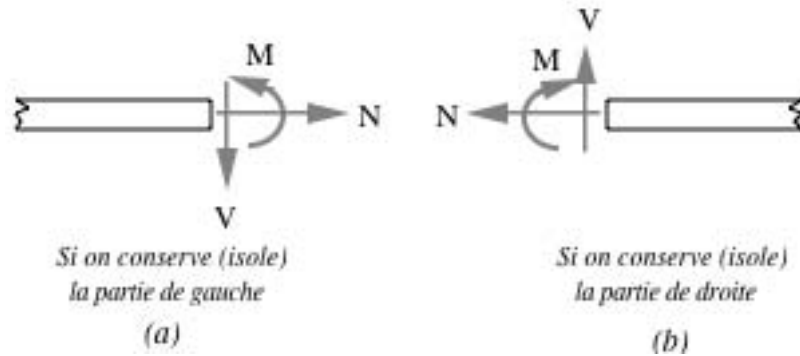


Fig. 7.17

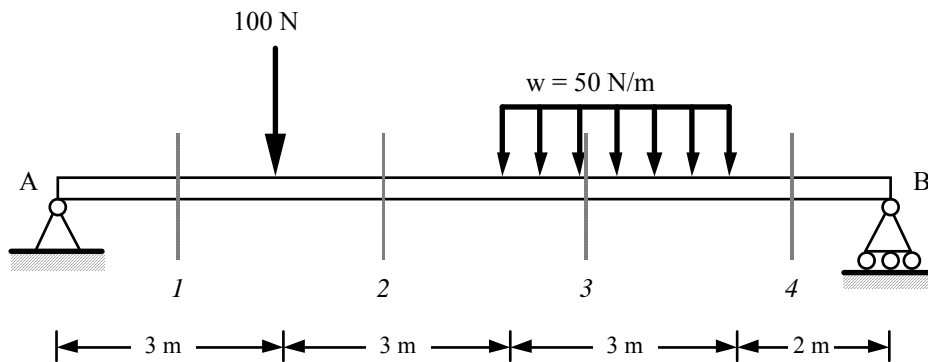
7.2.4 Diagrammes de V et M à partir des équations d'équilibre

D'après les comportements déjà étudiés dans les chapitres précédents, nous pouvons déduire que l'effort tranchant et le moment fléchissant ne sont pas constants, mais qu'ils varient en fonction de x . Il est donc nécessaire, pour faire une étude rigoureuse, d'établir des diagrammes qui donnent les valeurs de V et de M en tous points et qui permettent d'identifier les zones critiques où V et M atteignent des valeurs extrêmes.

Méthode:

- 1- Calculer les réactions d'appuis.
- 2- Déterminer le nombre de coupes à effectuer et délimiter la poutre en sections.
- 3- Résoudre les conditions d'équilibre pour chaque coupe afin de déterminer comment varie V et M en tout point de la section.
- 4- Calculer les valeurs aux limites de chaque section.
- 5- Tracer les diagrammes de V et M à partir des relations trouvées et des conditions aux limites.

EXEMPLE 7.1: Tracer les diagrammes de V et de M de la poutre illustrée ci-dessous.



Solution:

L'étude des charges nous montre que l'on doit faire 4 coupes dans cette poutre afin de trouver le comportement complet de V et de M .

Première étape on décompose les forces et on calcule les réactions d'appuis.

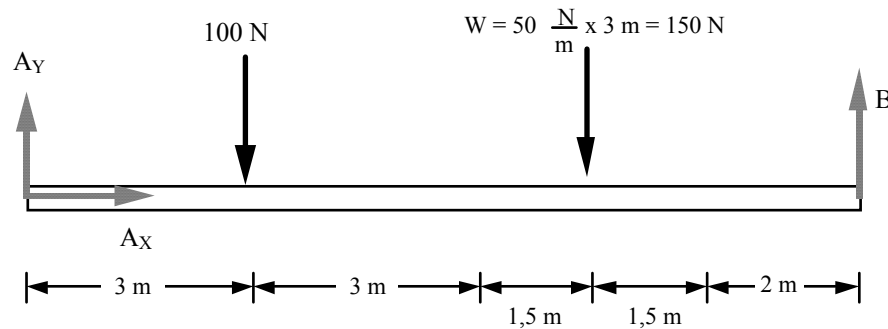


Fig. 7.18

$$\sum M_A = -(100 \times 3) - (150 \times 7,5) + (B \times 11) = 0 \quad \text{D'où } \underline{B = 129,55 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = \underline{A_x = 0}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= A_y - 100 - 150 + B = 0 \\ &= A_y - 100 - 150 + (129,55) = 0 \end{aligned}$$

D'où $\underline{A_y = 120,45 \text{ N}}$

Maintenant effectuons la première coupe 1:

$0 < x < 3 \text{ m}$

On place toujours l'axe des x selon l'axe de la poutre et son origine au début. La distance jusqu'à la coupe est alors " x ".

$$\sum F_x = \underline{N = 0}$$

$$\sum F_y = 120,45 - V = 0$$

D'où $\underline{V = 120,45 \text{ N}}$ et est constant de 0 à 3 m

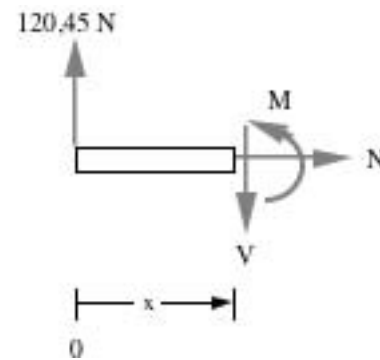


Fig. 7.19

$$\sum M = -(120,45 x) + M = 0$$

D'où $\underline{M = 120,45 x}$

Une équation linéaire du premier degré. Cette équation est donc celle d'une droite ($y = mx + b$), où 120,45 est la pente de la droite de $M(x)$. Curieusement on remarque que la pente de M représente la valeur de V . On verra plus loin la relation qu'il existe entre les deux. Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à $x = 0$ et à $x = 3$ m:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & V = 120,45 \text{ N} & M = 120,45 \times 0 = 0 \\ x = 3 \text{ m} & V = 120,45 \text{ N} & M = 120,45 \times 3 = 361,36 \text{ Nm} \end{array}$$

Donc dans cette section on voit que V est constant et vaut 120,45 N tandis que M varie linéairement passant de 0 à $x = 0$ à 361,36 Nm à $x = 3$ m; la pente étant de positive et valant 120,45.

Maintenant effectuons la seconde coupe (2):

$$\underline{3 \leq x \leq 6 \text{ m}}$$

On place toujours l'axe des x selon l'axe de la poutre et son origine au début. La distance jusqu'à la coupe est alors " x ".

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\sum F_y = 120,45 - 100 - V = 0$$

D'où $\underline{V = 20,45 \text{ N}}$

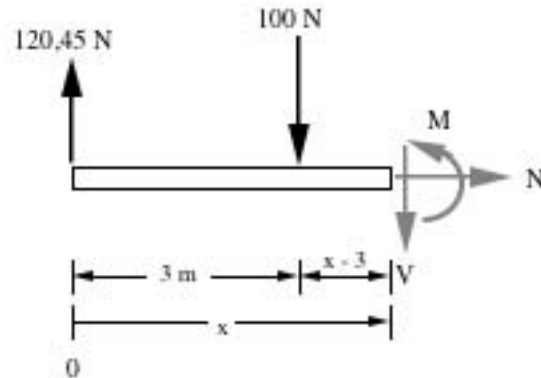


Fig. 7.20

$$\begin{aligned} \sum M &= -(120,45 x) + (100 (x - 3)) + M = 0 \\ &= -120,45 x + 100 x - 300 + M = 0 \end{aligned}$$

D'où $\underline{M = 20,45 x + 300}$

Une équation linéaire du premier degré. Cette équation est donc celle d'une droite ($y = mx + b$), où 20,45 est la pente de la droite de $M(x)$. Curieusement on remarque que la pente de M représente encore la valeur de V . On verra plus loin quelle relation il existe entre les deux. Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à $x = 3$ et à $x = 6$ m:

$$\begin{array}{lll} x = 3 \text{ m} & V = 20,45 \text{ N} & M = (20,45 \times 3) + 300 = 361,36 \text{ Nm} \\ x = 6 \text{ m} & V = 20,45 \text{ N} & M = (20,45 \times 6) + 300 = 422,73 \text{ Nm} \end{array}$$

Donc dans cette section on voit que V est constant et vaut 20,45 N tandis que M varie linéairement passant de 361,36 Nm à $x = 3$ m à 422,73 Nm à $x = 6$ m; la pente étant de positive et valant 20,45.

Maintenant effectuons la troisième coupe (3):

On place toujours l'axe des x selon l'axe de la poutre et son origine au début. La distance jusqu'à la coupe est alors " x ".

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\sum F_y = 120,45 - 100 - (50x - 300) - V = 0$$

$$\text{D'où } V = -50x + 320,45$$

$$\sum M = -(120,45 x) + (100 (x - 3)) + ((50x - 300)((x - 6)/2)) + M = 0$$

$$= -120,45x + 100x - 300 + 25x^2 - 300x + 900 + M = 0$$

$$\text{D'où } M = -25x^2 + 320,45x - 600$$

Une équation quadratique du second degré. Cette équation est donc celle d'une parabole ($y = ax^2 + bx + c$). Si vos souvenirs sont bons, on se rappelle que lorsque " a " > 0 la parabole a une concavité vers le *haut* et lorsque " a " < 0 elle a une concavité vers le *bas*. Ici, $a = -25$ donc < 0 , la concavité sera donc vers le *bas*.

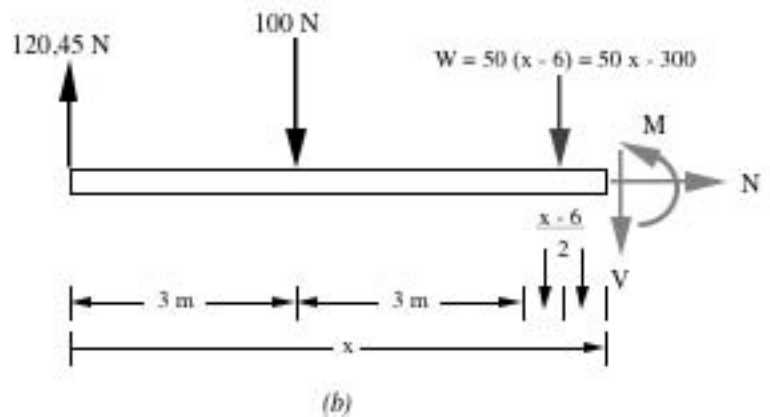
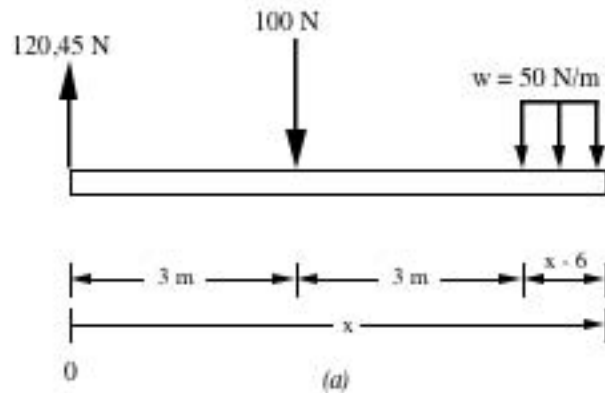


Fig. 7.21

Par contre, ici V varie linéairement tout comme M variait linéairement dans les deux coupes précédentes. Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à $x = 6$ et à $x = 9$ m:

$$\begin{aligned} x = 6 \text{ m} \quad V &= -(50 \times 6) + 320,45 = 20,45 \text{ N} \\ M &= -(25 \times 6^2) + (320,45 \times 6) - 600 = 422,73 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 9 \text{ m} \quad V &= -(50 \times 9) + 320,45 = -129,55 \text{ N} \\ M &= -(25 \times 9^2) + (320,45 \times 9) - 600 = 259,09 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Cette section est beaucoup plus compliquée que les précédentes, on voit que V varie linéairement passant de 20,45 N à $x = 6$ m à -129,54 N à $x = 9$ m tandis que M varie paraboliquement passant de 422,73 Nm à $x = 6$ m à 259,09 Nm à $x = 9$ m. Nous discuterons plus loin de l'allure de M , nous savons au moins que la concavité sera vers le bas puisque $a < 0$.

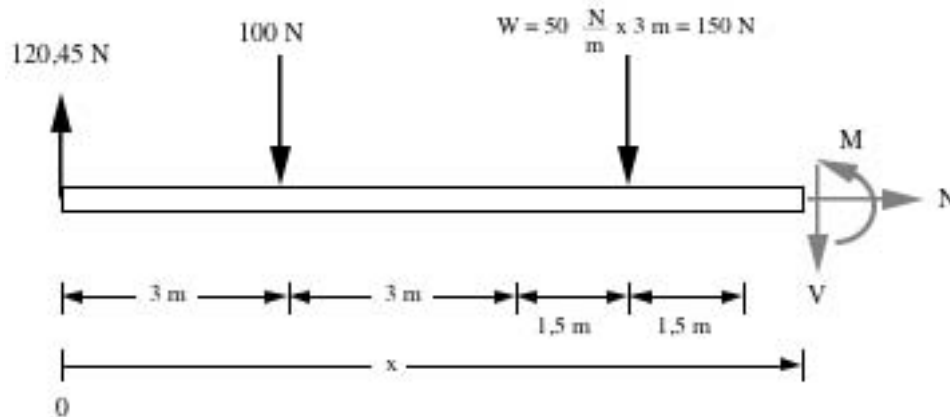


Fig. 7.22

On place toujours l'axe des x selon l'axe de la poutre et son origine au début. La distance jusqu'à la coupe est alors " x ".

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\sum F_y = 120,45 - 100 - 150 - V = 0$$

$$\text{D'où } V = -129,55 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum M &= -(120,45 x) + (100 (x - 3)) + (150 (x - 7,5)) + M = 0 \\ &= -120,45 x + 100 x - 300 + 150 x - 1125 + M = 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } M = -129,55 x + 1425$$

Une équation linéaire du premier degré. Cette équation est donc celle d'une droite ($y = mx + b$), où $-129,55$ est la pente de la droite de $M(x)$. On remarque que la pente de M représente la valeur de V . On verra plus loin quelle relation il existe entre les deux. Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à $x = 9$ et à $x = 11$ m:

$$\begin{array}{lll} x = 9 \text{ m} & V = -129,55 \text{ N} & M = (-129,55 \times 9) + 1425 = 259,09 \text{ Nm} \\ x = 11 \text{ m} & V = -129,55 \text{ N} & M = (-129,55 \times 11) + 1425 = 0 \text{ Nm} \end{array}$$

Donc dans cette section on voit que V est constant et vaut $-129,55 \text{ N}$ tandis que M varie linéairement passant de $259,09 \text{ Nm}$ à $x = 9 \text{ m}$ à 0 Nm à $x = 11 \text{ m}$; la pente étant de négative et valant $-129,55$.

Tentons d'analyser le comportement de V .

- De 0 à 3 m:** V part à 120,45 N, la même valeur que la réaction d'appui en A, puis demeure constant à 120,45 N jusqu'à 3 m.
- De 3 à 6 m:** À 3 m V saute d'un coup de 120,45 N à 20,45 N, c'est-à-dire de la même valeur que la charge qu'on rencontre à 3 m (100 N), puis V demeure constant jusqu'à 6 m.
- De 6 à 9 m:** V part de 20,45 N puis descend linéairement jusqu'à - 129,55 N, la pente de cette descente est -50 et a la même valeur que la charge distribuée (50 N/m). Elle descend linéairement de 150 N, c'est-à-dire de la valeur totale de la charge distribuée.
- De 9 à 11 m:** V demeure constant à - 129,55 N jusqu'à la fin. Cette valeur est la même, mais de sens contraire que la réaction d'appui B. On aurait donc une montée de 129,55 N à la sortie de la poutre pour atteindre une valeur 0 à la fin.

Tentons maintenant d'analyser le comportement de M .

- De 0 à 3 m:** M part de 0 à l'origine et monte linéairement jusqu'à 361,36 Nm selon une pente positive de 120,45 égale à la grandeur de V .
- De 3 à 6 m:** M part de 361,36 Nm et monte linéairement jusqu'à 422,73 Nm selon une pente positive de 20,45 égale à la grandeur de V .
- De 6 à 9 m:** M part de 422,73 Nm et se rend à 259,09 Nm selon une parabole, le comportement entre 6 et 9 m se doit d'être une parabole à concavité vers le bas car $a < 0$ (-25). Comme la concavité est vers le bas et que la valeur de M décroît, c'est qu'elle atteint un maximum entre 6 et 9 m. On verra plus loin comment localiser et calculer ce maximum.
- De 9 à 11 m:** M part de 259,09 Nm et descend linéairement jusqu'à 0 selon une pente négative de - 129,55 égale à la grandeur de V .

À la lueur de ces observations, traçons maintenant les diagrammes de V et de M . La *figure 7.23* illustre bien les tracés de V et de M . Une seule valeur nous est cependant inconnue. La valeur maximale que prend M entre 6 et 9 m.

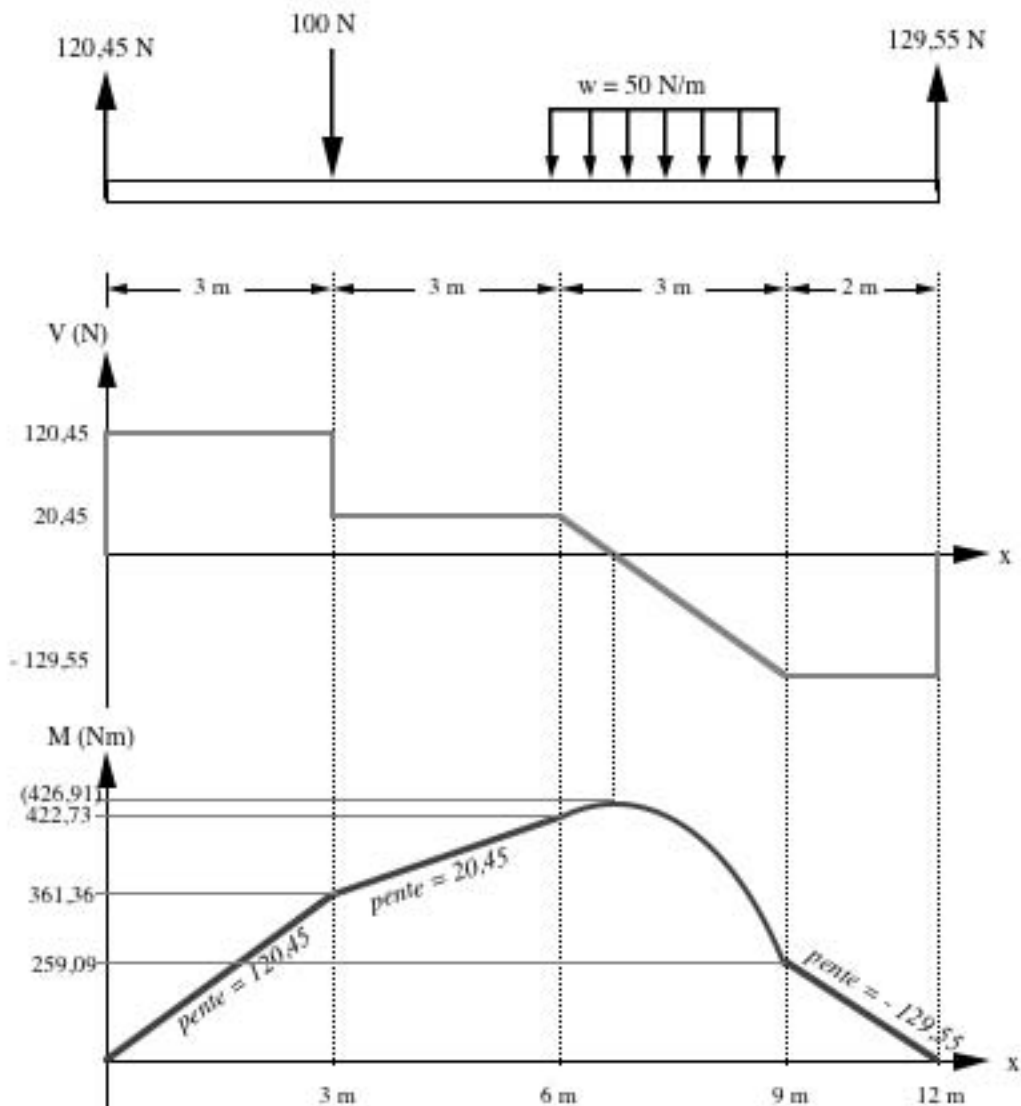


Fig. 7.23

Avant d'entreprendre la recherche de ce maximum, voyons tout d'abord la relation qu'il existe entre V et M . On a noté dans la plupart des intervalles que la valeur de V représente la *pente* de M . Nous n'avons cependant pas donné cette interprétation dans la zone de 6 à 9 m où M varie de façon parabolique; car nous ne pouvions alors l'affirmer. Or mathématiquement, on sait que la dérivée d'une équation nous donne sa pente en tout point. On peut donc maintenant affirmer que la *dérivée* de M nous donne la *valeur* de V .

Relation effort tranchant-moment fléchissant:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (7.1)$$

Donc V représente la *pente* en tout point de M . Si on observe le diagramme de V dans la section entre 6 et 9 m, on s'aperçoit que V passe par "0". Ce qui signifie que la *pente* de M prend la valeur "0" entre 6 et 9 m; et on ne peut avoir une pente nulle ou "0" que si on passe par un point maximum ou minimum.

Deux façons s'offrent à nous pour trouver quel est justement ce point maximum. Une première graphique et une seconde mathématique.

La première consiste à localiser graphiquement le point où V passe par "0" à partir des triangles semblables. La seconde consiste à trouver mathématiquement la valeur de x pour laquelle la dérivée (pente) de M est égale à "0". Observons d'abord les diagrammes et ensuite nous décortiquerons ces deux méthodes.

Première méthode:

Si on observe le triangle tirée du diagramme de V . On peut donc dire que:

$$\frac{3}{150} = \frac{y}{20,45}$$

D'où $y = 0,409$

Donc V passe par "0" à $x = 6 + 0,409 = \underline{\underline{6,409 \text{ m}}}$

Si on veut la valeur de M , on remplace la valeur de x dans l'équation de M de cette section (coupe 3), pour laquelle V passe par "0" et on obtient:

$$M = -(25 \times 6,409^2) + (320,45 \times 6,409) - 600 = \underline{\underline{426,91 \text{ Nm}}} \text{ Valeur maximale de } M.$$

Seconde méthode:

Elle consiste à utiliser les lois de calcul différentiel. On sait que lorsque la pente est nulle sur une courbe, c'est que cette courbe atteint un maximum ou un minimum (relatif ou absolue) à ce point.

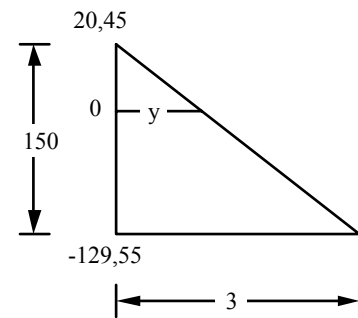


Fig. 7.24

Or deux volets s'offrent à nous; un premier consiste à dériver l'équation de M afin de trouver l'équation de la pente de M en tous points. Et on veut savoir à quel point cette pente est nulle. Le second volet consiste dans le fait que l'équation de V correspond déjà à la dérivée de M , donc si on possède déjà cette équation, on a pas besoin de dériver M . Vérifions si tout cela est vrai.

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d(-25x^2 + 320,45x - 600)}{dx} = -50x + 320,45$$

La même équation que l'on retrouve pour cette coupe. On veut donc savoir où cette équation (pente) passe par "0". Donc:

$$V = -50x + 320,45 = 0$$

$$50x = 320,45 \quad \text{D'où } \underline{x = 6,409 \text{ m}}$$

La même valeur de x que trouvée précédemment, en insérant cette valeur dans l'équation de M de cette section on trouve la valeur le M à ce point, c'est-à-dire la valeur maximale de M , soit **426,91 Nm**.

On trouve donc comme valeurs maximales $M = 426,91 \text{ Nm}$ et de $V = 129,55 \text{ N}$. Pour les valeurs maximales, le signe n'est pas important, c'est l'intensité (grandeur) qui compte.

EXEMPLE 7.2: Tracer les diagrammes de V et de M de la poutre illustrée à la figure 7.25.

Solution:

À l'inspection de la poutre ci-contre, on voit que l'on doit effectuer trois coupes. Mais débutons d'abord par le calcul des réactions d'appuis.

Cette poutre possède un encastrement, donc un moment d'encastrement nommé M_A .

$$\sum M_A = (300 \times 6) - 1200 + M_A = 0$$

$$\text{D'où } M_A = -600 \text{ Nm}$$

$$\sum F_x = A_x = 0 \text{ et } \sum F_y = -300 + A_y = 0$$

$$\text{D'où } A_y = 300 \text{ N}$$

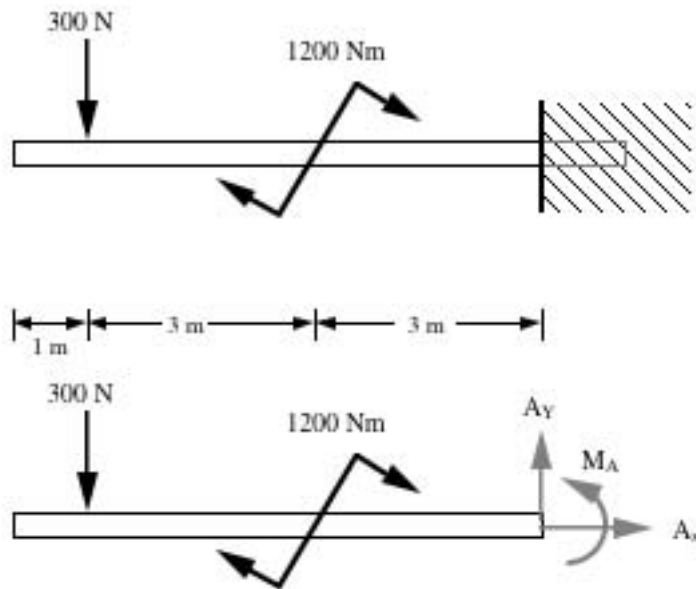


Fig. 7.25

Première coupe:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned}$$

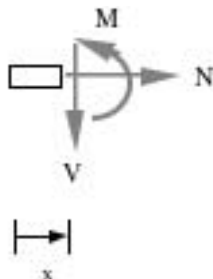


Fig. 7.26

Donc V et M sont constants et nuls.

Seconde coupe:

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\sum F_y = -300 - V = 0 \quad \text{D'où} \quad V = -300 \text{ N}$$

$$\sum M = (300(x - 1)) + M = 0 \quad \text{D'où} \quad M = -300x + 300$$

Donc M varie linéairement, on voit bien que la dérivée (pente) de M est bien donnée par V. Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à x = 1 et à x = 4 m:

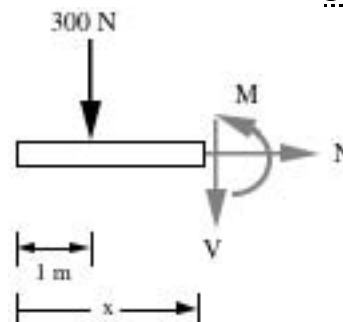


Fig. 7.27

$$\begin{aligned} x &= 1 \text{ m} \\ x &= 4 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= -300 \text{ N} \\ V &= -300 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= -(300 \times 1) + 300 = 0 \text{ Nm} \\ M &= -(300 \times 4) + 300 = -900 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Donc, dans cette section, on voit que V est constant et vaut -300 N tandis que M varie linéairement passant de 0 à x = 1 m à -900 Nm à x = 4 m; la pente étant négative et valant -300.

Troisième coupe:

$$\sum F_x = N = 0$$

$$\sum F_y = -300 - V = 0 \quad \text{D'où} \quad V = -300 \text{ N}$$

$$\sum M = (300(x - 1)) - 1200 + M = 0$$

$$\text{D'où} \quad M = -300x + 1500$$

Donc M varie linéairement, on voit bien que la dérivée (pente) de M est bien donnée par V.

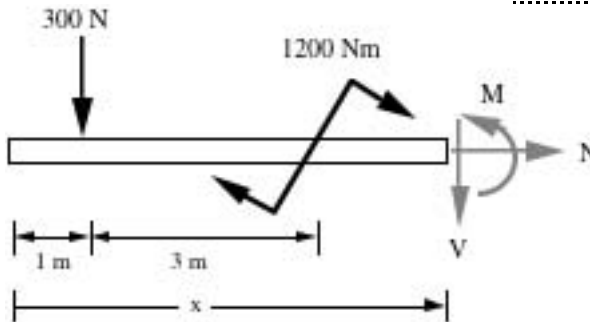


Fig. 7.28

Vérifions maintenant les conditions aux limites, à savoir à $x = 1$ et à $x = 4$ m :

$$\begin{array}{lll} x = 4 \text{ m} & V = - 300 \text{ N} & M = - (300 \times 4) + 1500 = 300 \text{ Nm} \\ x = 7 \text{ m} & V = - 300 \text{ N} & M = - (300 \times 7) + 1500 = - 600 \text{ Nm} \end{array}$$

Donc, dans cette section, on voit que V est constant et vaut $- 300$ N tandis que M varie linéairement passant de 300 Nm à $x = 4$ m à $- 600$ Nm à $x = 7$ m; la pente étant négative et valant $- 300$. On remarque aussi que la valeur de M change brusquement de $- 900$ Nm à 300 Nm (la valeur du couple présent à $x = 4$ m; i.e. 1200 Nm) à $x = 4$ m.

On remarque aussi que la valeur finale de $V = - 300$ N est compensée par la valeur de la réaction d'appui $A_y = 300$ N. De même, la valeur finale de $M = - 600$ Nm est compensée par la valeur finale du moment d'encastrement $M_A = 600$ Nm.

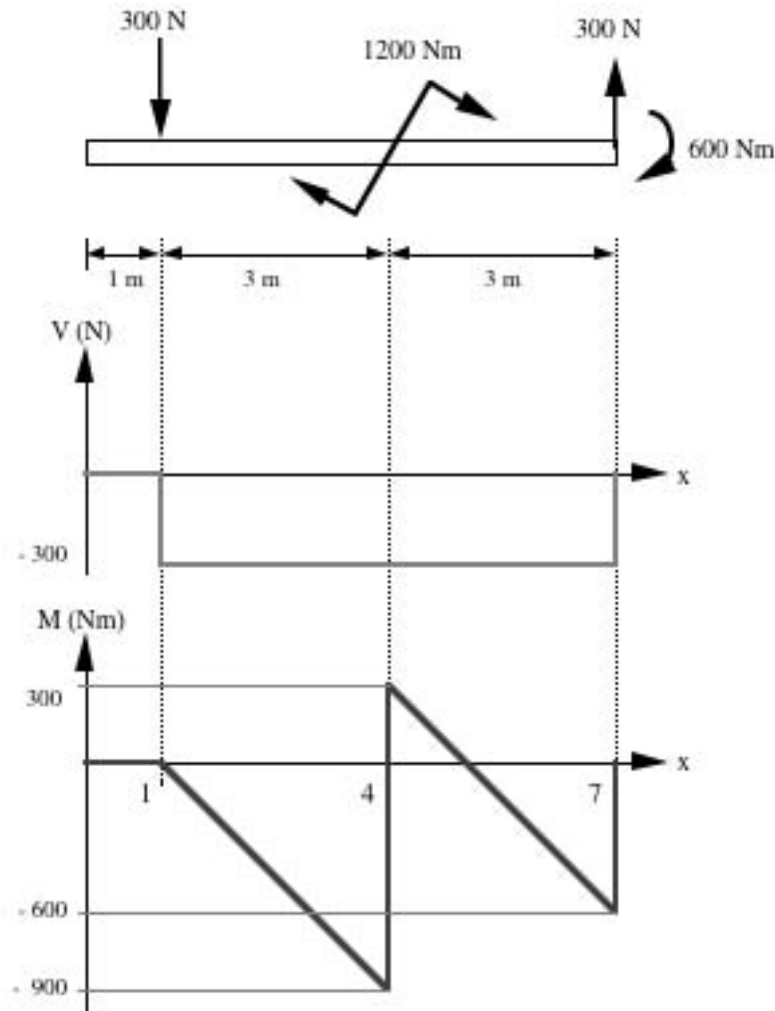


Fig. 7.29

Les valeurs maximales de V et de M sont:

$$V_{\max} = 300 \text{ N}$$

$$M_{\max} = 900 \text{ Nm}$$

On remarque ici que les valeurs maximales peuvent être positives ou négatives, le signe n'est pas important, c'est l'intensité (grandeur) qui compte.

On remarque, dans le diagramme de M de la *figure 7.29*, que **M passe par "0"** à deux reprises. Si on se souvient bien, lorsque **$M > 0$** c'est que les **fibres supérieures sont en compression** tandis que lorsque **$M < 0$** elles **sont en tension**. Or si **M passe de + à - ou - à +** c'est qu'il y a un endroit où **$M = 0$** ; donc un endroit où **les fibres ne sont ni comprimées ni étirées**. *Cet endroit s'appelle le point d'inflexion.*

Résumé:

Si	$V = 0$	\Leftrightarrow	Extremum (min ou max)
Si	$M = 0$	\Leftrightarrow	Point d'inflexion

7.2.5 Relation entre V et M

À la lumière de la conclusion tirée de l'exemple 7.1, à savoir que V représente la pente (dérivée) de M en tout point; nous pouvons tirer une autre conclusion. En physique, comme en mathématique, qui dit pente (dérivée) dans un graphique dit aire sous la courbe (intégrale) dans l'autre. En effet, cette relation entre la pente et l'aire sous la courbe existe dans chaque cas, et elle nous est très importante dans l'étude des différentes courbes.

La *pente* dans le graphique de M , ou la *dérivée* de M nous donne V :

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (7.1)$$

Ou, si on veut, l'équation de V représente la *pente* de M en tout point.

Maintenant, la relation inverse existe et s'explique ainsi: l'aire sous la courbe dans le graphique de V (à l'inverse de la pente dans le graphique de M) représente la **variation de M**.

Aire sous la courbe dans le diagramme de $V = \text{variation de } M = \Delta M$

$$\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V dx \quad (7.2)$$

Ces deux relations nous permettent de trouver l'un des deux diagrammes à partir de l'autre. Ainsi, si on connaît le diagramme de M, on peut tracer aisément le diagramme de V en calculant la dérivée (pente) de M en tout point. Cette pente représente l'équation de V donc la valeur *directe* de V.

De l'autre côté, si on connaît le diagramme de V (qui, on verra plus loin, n'est pas très difficile à tracer directement); on peut, en calculant l'aire sous la courbe de V, trouver la *variation* de M (ΔM).

Cette méthode nous demande par contre de connaître la valeur initiale de M car ici on a la valeur *indirecte* de M (ΔM) ou si on veut la variation que subit M durant l'intervalle représenté dans la section où l'on a calculé l'aire sous la courbe.

Reprenons le diagramme de V de l'exemple 7.1 et essayons de trouver la variation de M (ΔM) à partir de l'aire sous la courbe de V.

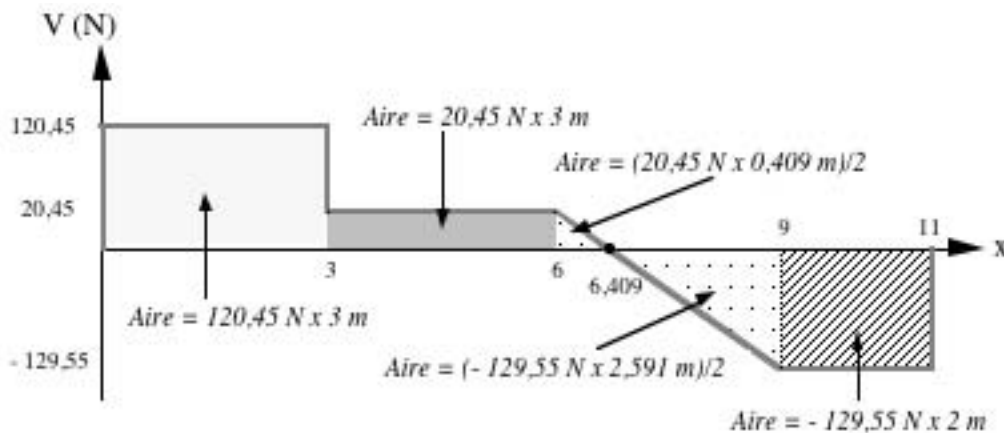


Fig. 7.30

De 0 à 3 m:	Aire sous la courbe (<i>rectangle</i>) de $V = \text{variation de } M = \Delta M = 120,45 \text{ N} \times 3 \text{ m} = \mathbf{361,36 \text{ Nm}}$.
De 3 à 6 m:	Aire sous la courbe (<i>rectangle</i>) de $V = \text{variation de } M = \Delta M = 20,45 \text{ N} \times 3 \text{ m} = \mathbf{61,36 \text{ Nm}}$.
De 6 à 9 m:	Aire sous la courbe (<i>deux triangles</i>) de $V = \text{variation de } M = \Delta M = (20,45 \text{ N} \times 0,409 \text{ m})/2 + (-129,55 \text{ N} \times 2,591 \text{ m})/2 = \mathbf{4,18 \text{ Nm} - 167,83 \text{ Nm} = -163,64 \text{ Nm}}$
De 9 à 11 m:	Aire sous la courbe (<i>rectangle</i>) de $V = \text{variation de } M = \Delta M = -129,55 \text{ N} \times 2 \text{ m} = \mathbf{-259,09 \text{ Nm}}$.

Comme l'aire sous la courbe représente la variation de M (ΔM), on peut donc dire que:

$$M(3) = M(0) + \Delta M(0-3)$$

C'est-à-dire que $M(3)$ (M à 3 m) vaut $M(0)$ (M à l'origine (0 m)) + la variation de M entre 0 et 3 m ou l'aire sous la courbe de V entre 0 et 3 m: $\Delta M(0-3)$.

Comme il n'y a pas de moment au début de la poutre, on suppose que le moment initial est nul ($M(0) = 0$). Ainsi, après 3 m, le moment subit une variation de 361,36 Nm donc passe à $0 + 361,36 \text{ Nm} = 361,36 \text{ Nm}$. Donc:

$$\mathbf{M(3) = 0 + 361,36 \text{ Nm} = 361,36 \text{ Nm}}$$

Comme $M(3) = 361,36 \text{ Nm}$. Ainsi, après trois autres mètres, le moment subit une variation de 61,36 Nm. Il passe à $361,36 \text{ Nm} + 61,36 \text{ Nm} = 422,73 \text{ Nm}$. Donc:

$$\mathbf{M(6) = 361,36 + 61,36 \text{ Nm} = 422,73 \text{ Nm}}$$

Comme $M(6) = 422,73 \text{ Nm}$. Ainsi, après encore trois autres mètres, le moment subit une variation de -163,64 Nm. Il passe à $422,73 \text{ Nm} - 163,64 \text{ Nm} = 259,09 \text{ Nm}$. Donc:

$$\mathbf{M(9) = 422,73 - 163,64 \text{ Nm} = 259,09 \text{ Nm}}$$

Finalement, comme $M(9) = 259,09 \text{ Nm}$. Ainsi, après les deux derniers mètres, le moment subit une variation de -259,09 Nm. Il passe à $259,09 \text{ Nm} - 259,09 \text{ Nm} = 0 \text{ Nm}$. Donc:

$$\mathbf{M(11) = 259,09 - 259,09 \text{ Nm} = 0 \text{ Nm}}$$

On retrouve ici, exactement les mêmes valeurs de M que celles retrouvées par la méthode des équations d'équilibre. Maintenant, si on veut tracer directement le graphique de M il nous manque une dernière chose, c'est l'allure de la courbe (droite, parabole, pente positive, négative, concavité vers le haut, vers le bas, ...), c'est ce que nous allons voir dans la prochaine section.

7.2.6 Diagrammes de V et de M directement à partir des charges

À partir des exemples décrits dans les sections précédentes, nous pouvons tirer certaines relations entre les charges, le diagramme de V et le diagramme de M .

En se déplaçant sur la poutre:

- 1- Si on ne rencontre pas de charge (espace entre deux charges):

V *demeure constant*
M *varie linéairement* (pente constante)

- 2- Si on rencontre une charge concentrée (ou réaction d'appui):

V *saute brusquement d'une valeur égale à la charge et dans le sens de la charge*
M *change brusquement de pente* (cassure dans la courbe mais pas de saut)

- 3- Si on rencontre une charge distribuée:

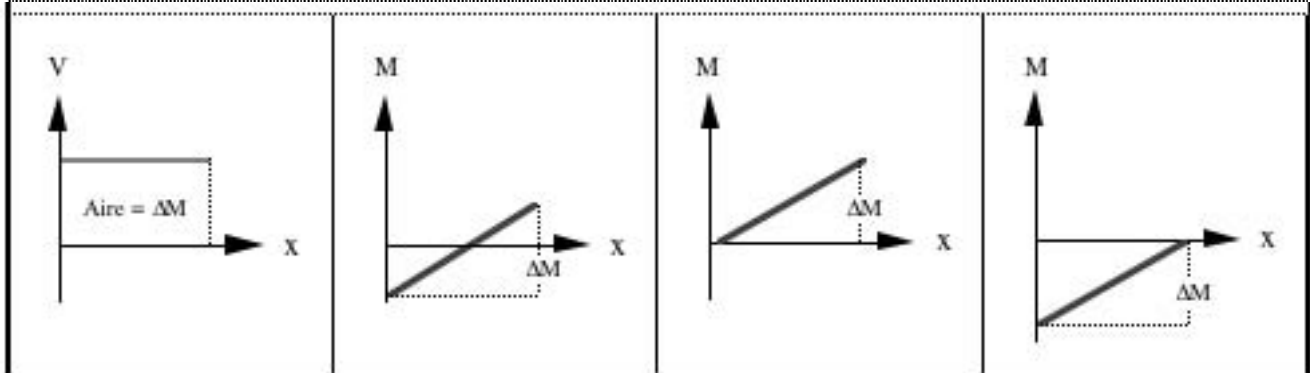
V *varie linéairement changeant graduellement d'une valeur égale à la totalité de la charge distribuée.*
M *varie de façon parabolique*

- 4- Si on rencontre un couple (ou moment d'encastrement):

V *ne change pas* (il ne sera affecté que par les réactions causées par le couple)
M *change brusquement d'une valeur égale à celle du couple* (saut positif si horaire et négatif si anti-horaire)

Regardons maintenant les graphiques caractéristiques associés à ces constatations.

Si V est constant et positif (+); M est une droite dont la pente est constante et positive. M augmente d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de $V = \Delta M$ (positif). M peut être négatif ou positif, il augmente toujours d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de V .



Si V est constant et négatif (-); M est une droite dont la pente est constante et négative. M diminue d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de $V = \Delta M$ (négatif). M peut être négatif ou positif, il diminue toujours d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de V .

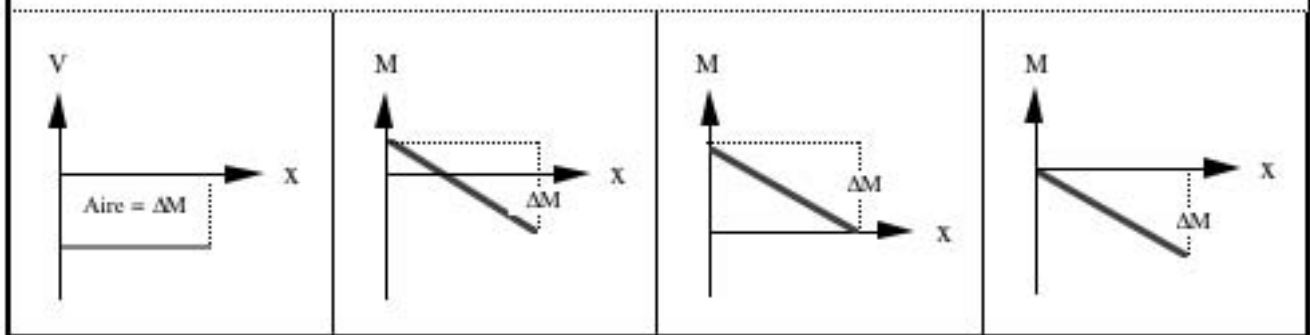


Tableau 7.1 : Graphiques lorsque que V est constant

Si V est croissant et positif (+); M est une parabole dont la concavité est vers le haut ($a > 0$). M augmente d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de $V = \Delta M$ (positif). M peut être négatif ou positif, il augmente toujours d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de V .

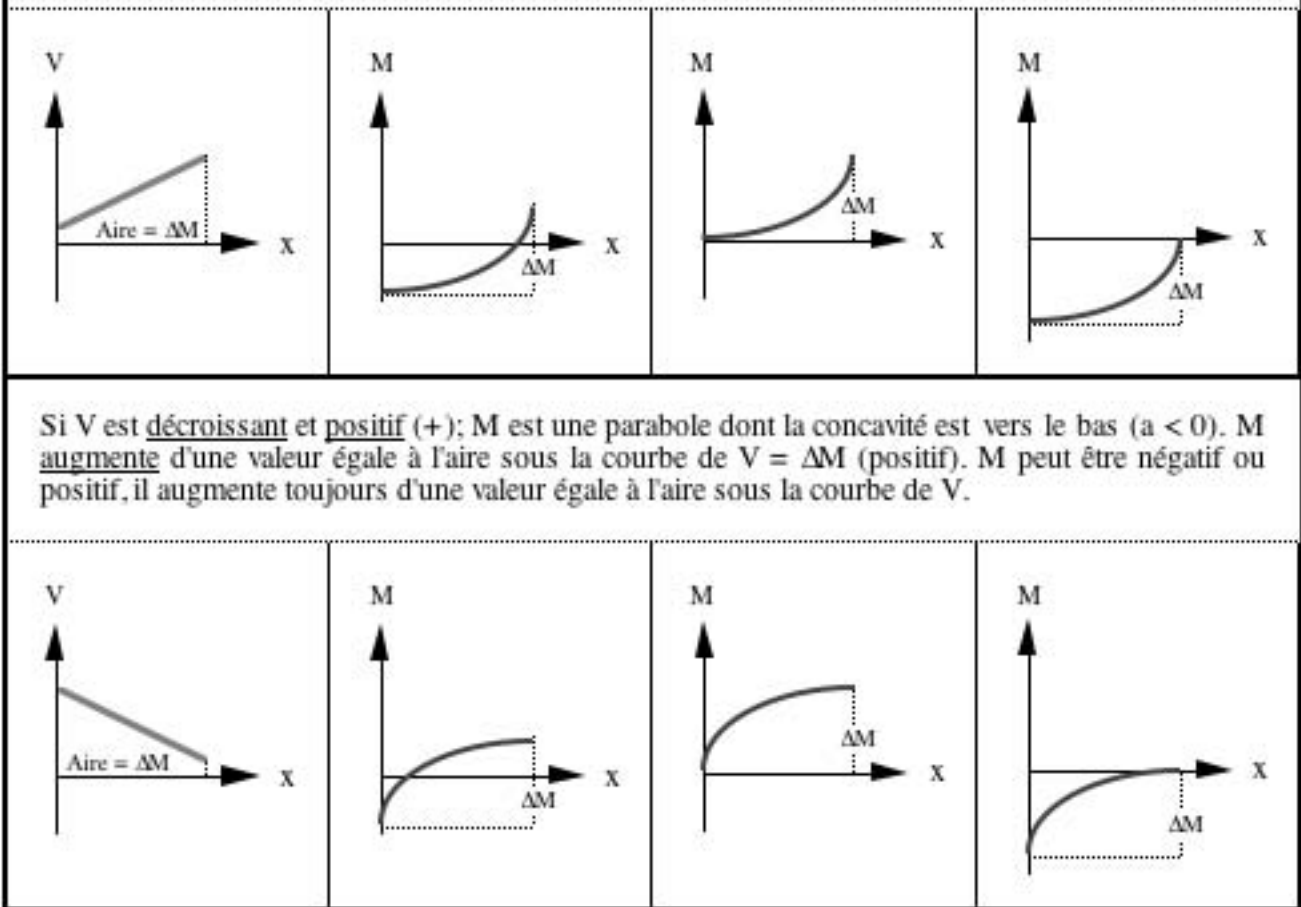


Tableau 7.2 : Graphiques lorsque que V est positif et varie linéairement

Si V est croissant et négatif (-); M est une parabole dont la concavité est vers le haut ($a > 0$). M diminue d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de $V = \Delta M$ (négatif). M peut être négatif ou positif, il diminue toujours d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de V .

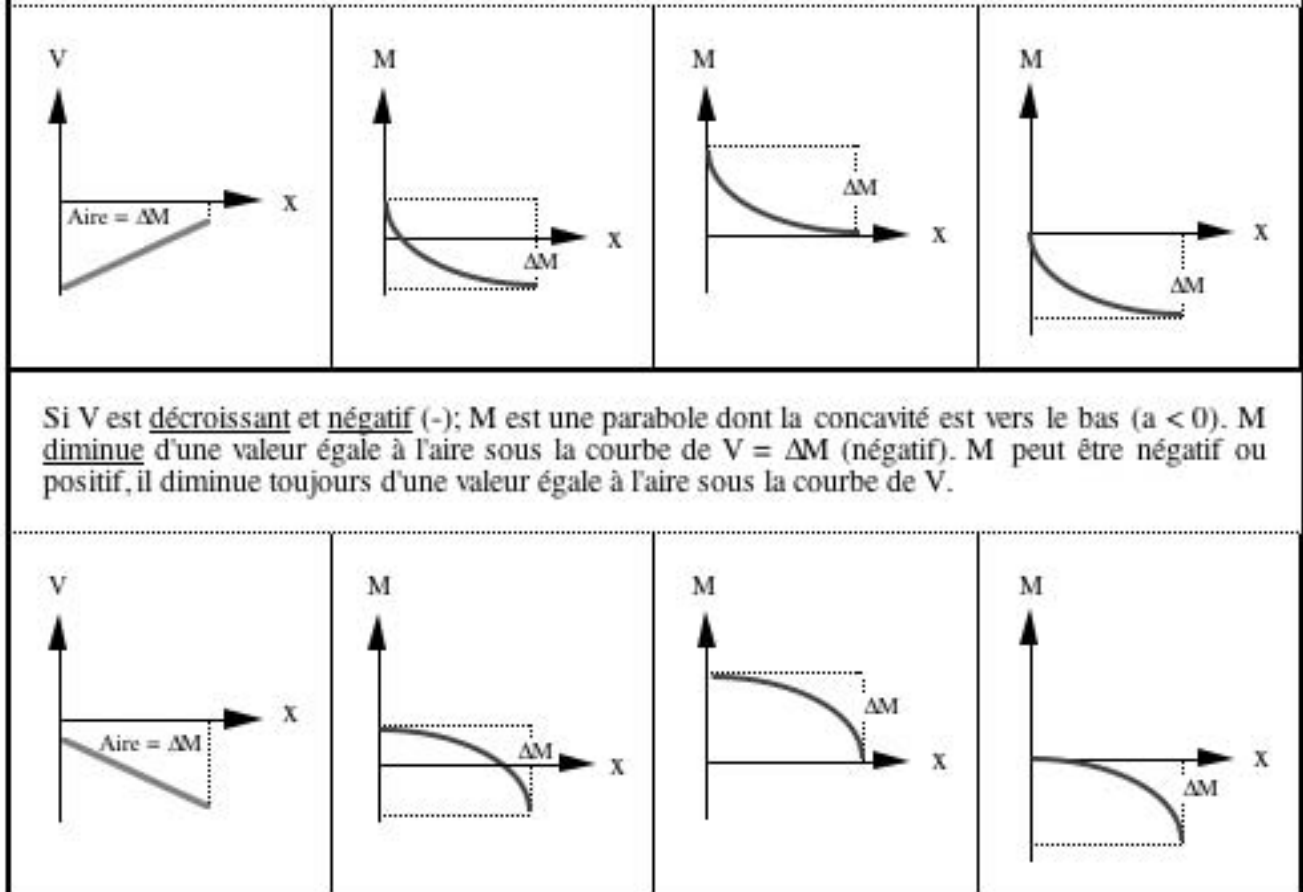


Tableau 7.3 : Graphiques lorsque que V est négatif et varie linéairement

Si V est croissant mais passe de négatif (-) à positif (+); M est une parabole dont la concavité est vers le haut ($a > 0$ car croissant). Alors V passe par "0" donc la pente de M tombe à "0" au même point; ce qui signifie que M passe par un minimum (relatif ou absolue) M varie d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de $V = \Delta M$. M peut être négatif ou positif, il varie toujours d'une valeur égale à l'aire sous la courbe de V et passe dans cette section par un minimum.

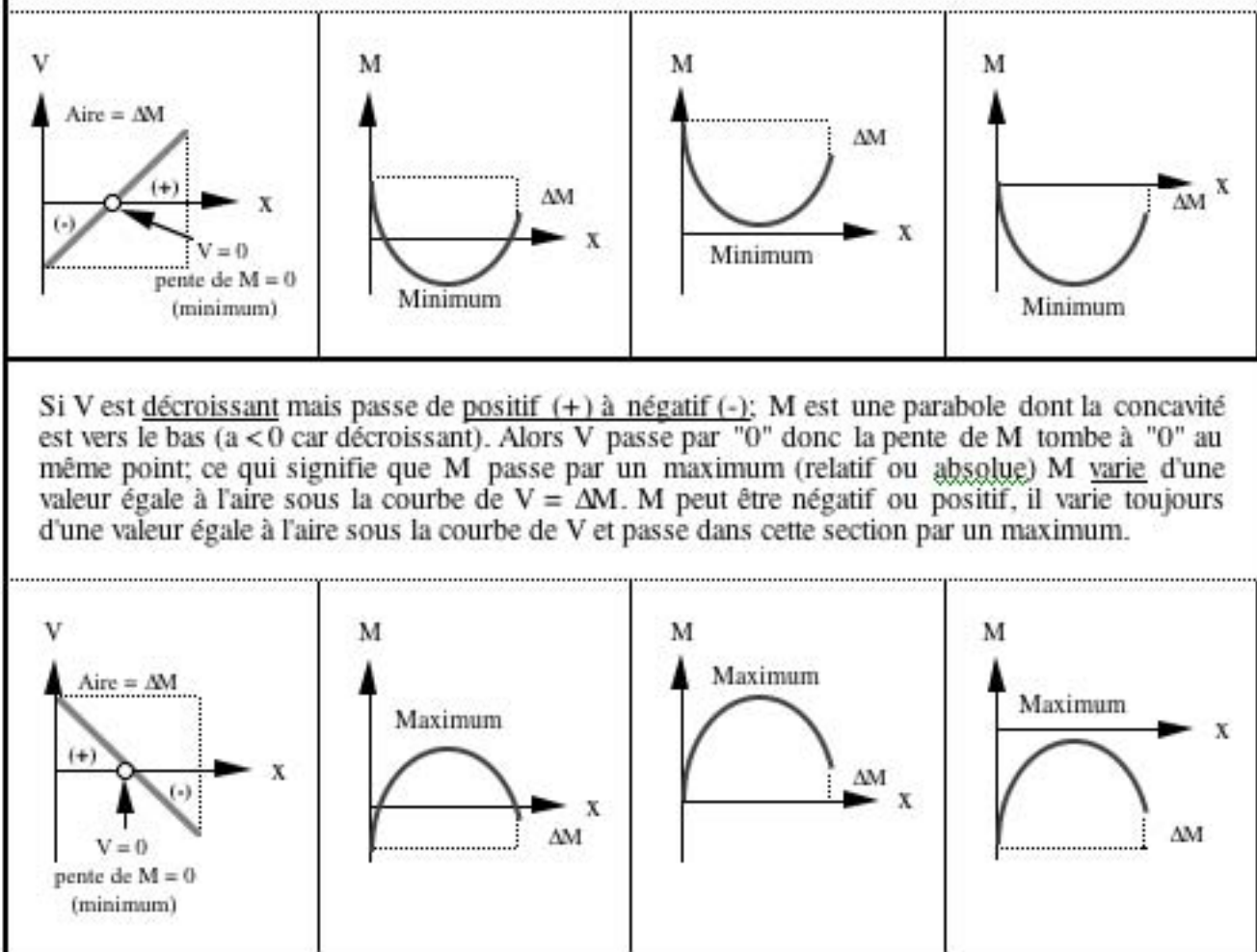


Tableau 7.4 : Graphiques lorsque que V varie linéairement et passe par zéro (0)

EXEMPLE 7.3: Reprendre l'exemple 7.1 de la section 7.2.4. Après avoir calculé les réactions d'appuis, nous avons la situation ci-dessous. Tracer V et M directement à partir des charges.

Solution:

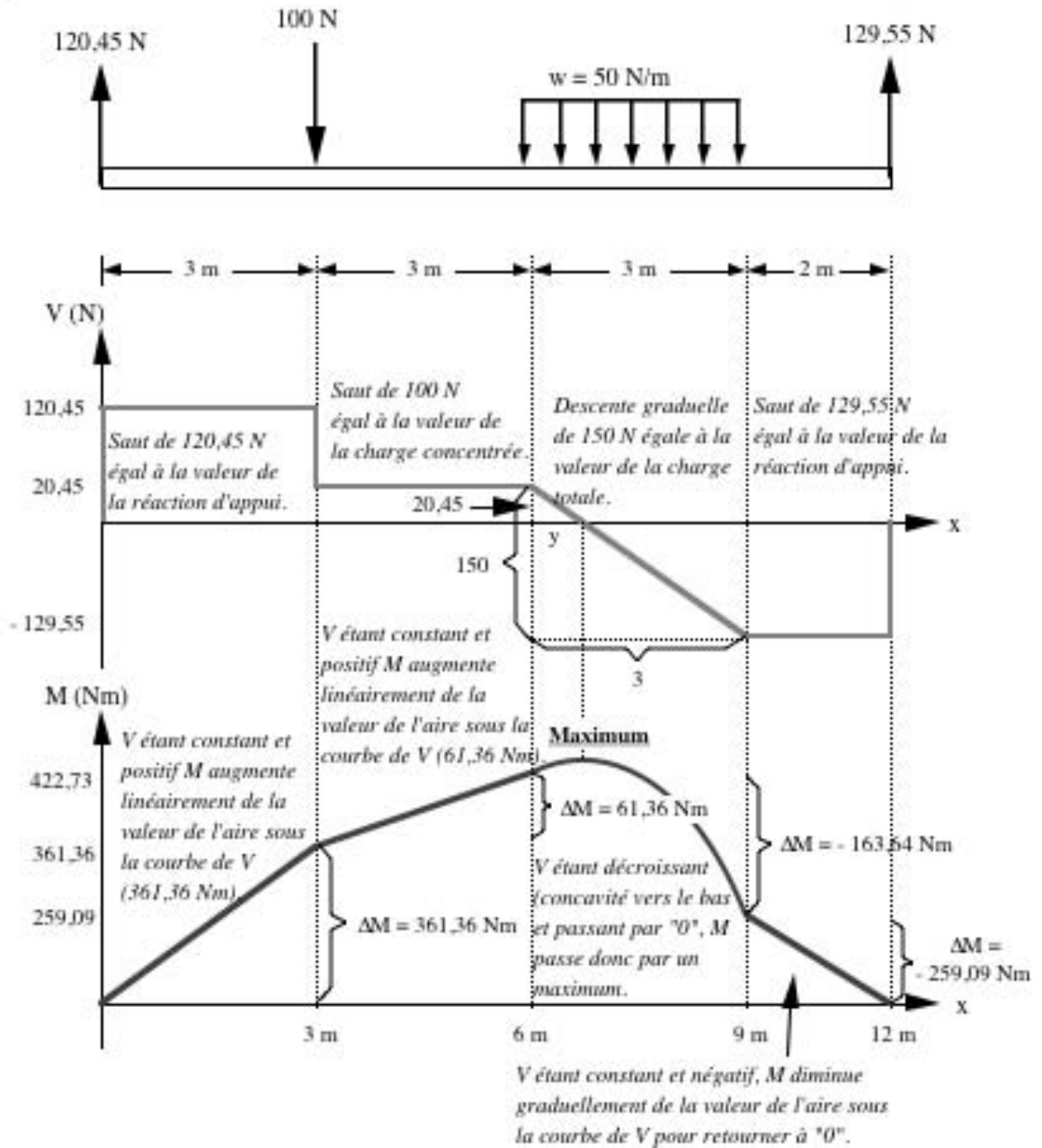


Fig. 7.31

Lorsqu'on est en présence d'un minimum ou d'un maximum, on doit faire une coupe dans la section où se trouve cet extremum afin de le calculer car on a besoin absolument de l'équation de M dans cette section afin de pouvoir trouver sa valeur.