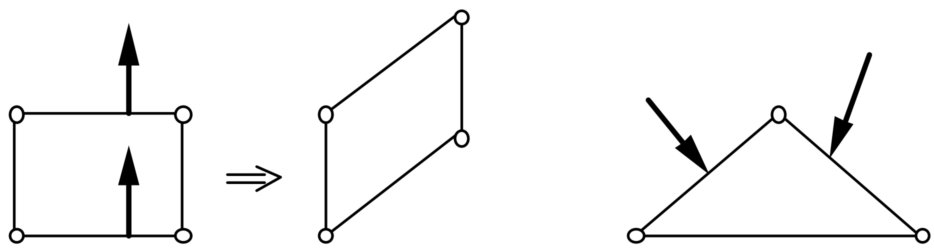
4
LES TREILLIS

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 Généralités

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes de toiture, de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc. On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité.

Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles. Le triangle a été pris comme base de ces constructions parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable.



Tout polygone autre qu'un triangle est ***déformable***

Un triangle est par contre ***indéformable***

Fig. 4.1

Les treillis peuvent être sollicitées par des forces **externes** comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces **internes** de la part des pièces voisines. Ces efforts <u>internes</u> et <u>externes</u> doivent être déterminées pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

Définitions:

<u>Barres ou membrures</u>:	Les pièces d'une structure triangulée sont des barres. Elles sont faites d'acier, de bois ou autre. On associe généralement les barres ou membrures des treillis à des barres articulées.
<u>Noeud</u>:	Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un noeud. Les noeuds peuvent être fait de joint solide (assemblage par rivetage, soudage, ...) ou des articulations (assemblage par rotule, axe, ...)

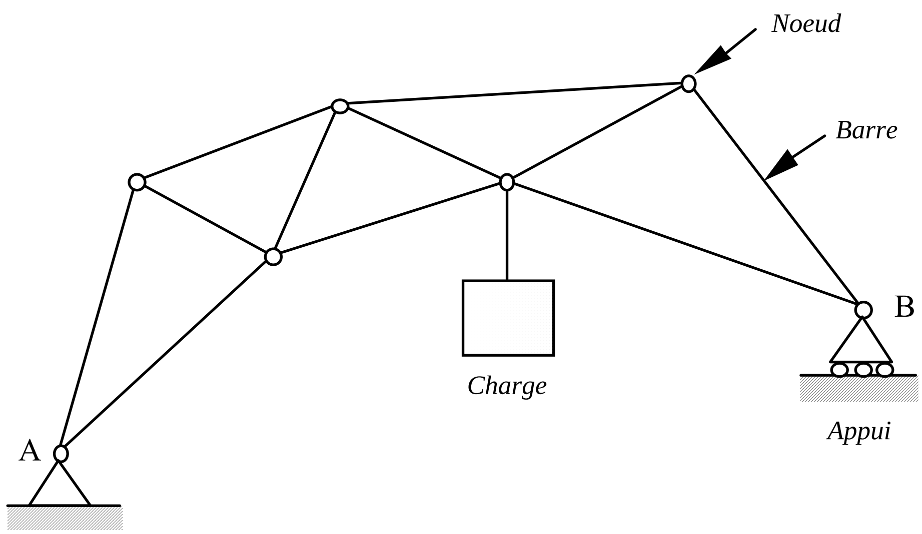


Fig. 4.2

4.1.2 Construction

Les treillis étant généralement des barres articulées, doivent être construits selon des règles strictes afin d'en assurer leur rigidité.

Méthode:

1- On construit un premier triangle avec trois barres articulées; ce qui donne trois barres et trois noeuds.

2- On ajoute à ce premier triangle un autre triangle en insérant deux barres; ce qui donne maintenant cinq barres et 4 noeuds.

3- On ajoute triangle par triangle (en ajoutant deux barres et 1 noeuds) jusqu'à l'obtention de la structure complète.

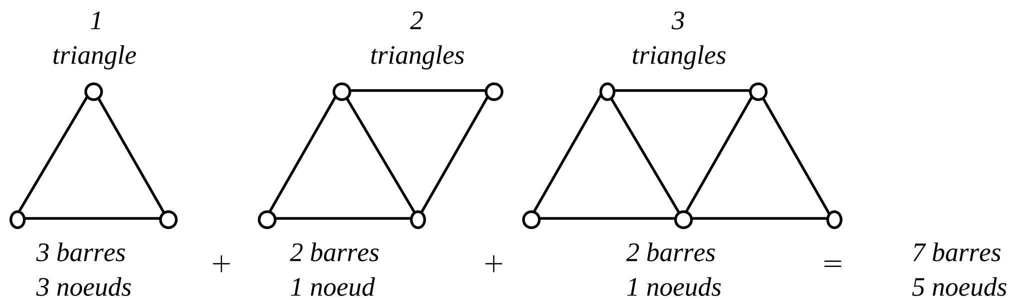


Fig. 4.3

Donc si l'on ajoute 1 triangle, on ajoute par le fait même 2 barres et 1 noeud. En généralisant on peut dire que: si on ajoute x triangles, on ajoute de ce fait x noeuds et 2x barres.

Posons: m = nombre de barres du treillis
n = nombre de noeuds du treillis

donc:

$$n = \underbrace{3}_{\text{noeuds du premier triangle}} + \underbrace{x}_{\text{noeuds ajoutés}} \qquad \textbf{\textit{(4.1)}}$$

$$m = 3 + 2x \qquad \textbf{\textit{(4.2)}}$$

Afin d'éliminer les x, on peut prendre l'équation ***4.2*** et soustraire 2 fois l'équation ***4.1***.

$$\begin{array}{rccc} m = & 3 & + & 2x \\ \underline{-(2n =} & \underline{6} & \underline{+} & \underline{2x)} \\ (m - 2n) = & -3 & & \end{array}$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{m = 2n - 3}} \qquad \textbf{\textit{(4.3)}}$$

Donc pour un treillis comportant par exemple 6 noeuds, celui-ci possèdera (6 x 2 - 3) barres; c'est-à-dire 9 barres. Il ne faut pas oublier qu'il faut toujours respecter l'ordre de construction.

4.1.3 Assemblage

On construit les treillis en assemblant les barres aux noeuds par différents moyens. L'assemblage se fait par boulonnage, rivetage, chevillage, soudage, ... Si l'assemblage se fait par soudure ou rivetage, on considère que le noeud est articulé si les axes des barres sont concourantes et si les barres sont longues par rapport à leur grosseur.

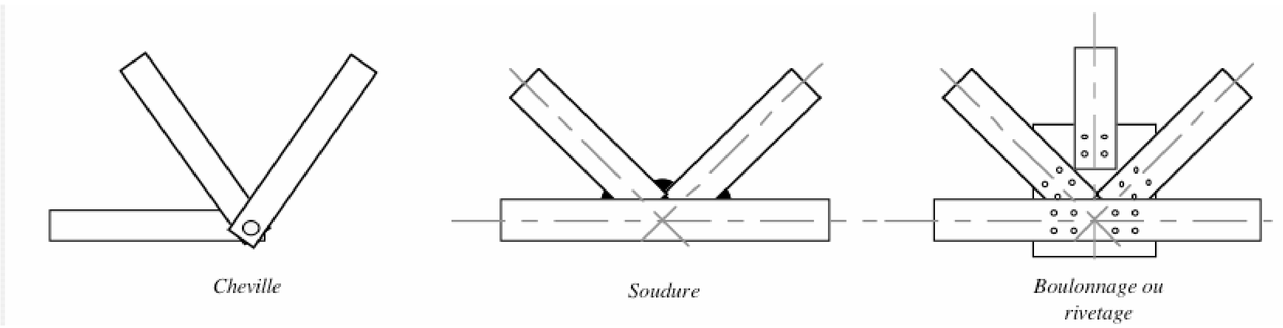


Fig. 4.4

4.1.4 Chargement

Le chargement que doit supporter un treillis doit être appliqué aux noeuds; ce qui a pour effet de provoquer des **contraintes** en traction et en compression dans les barres. Le fait d'ajouter une charge sur une barre entre ses articulations amènerait un effort en flexion qui pourrait provoquer la destruction du treillis.

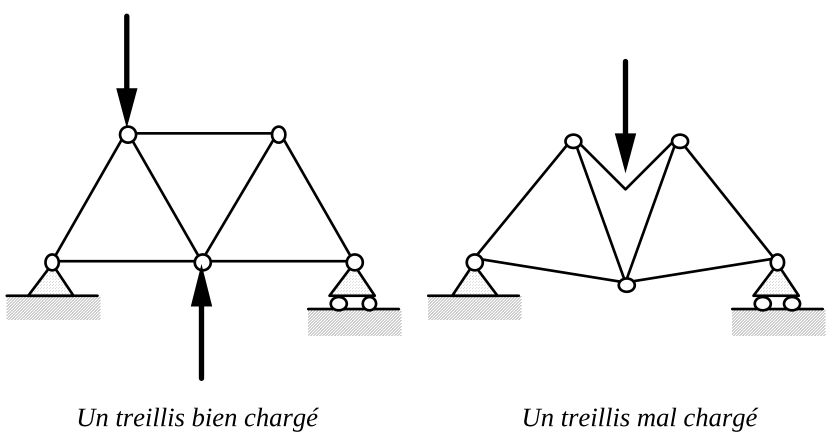
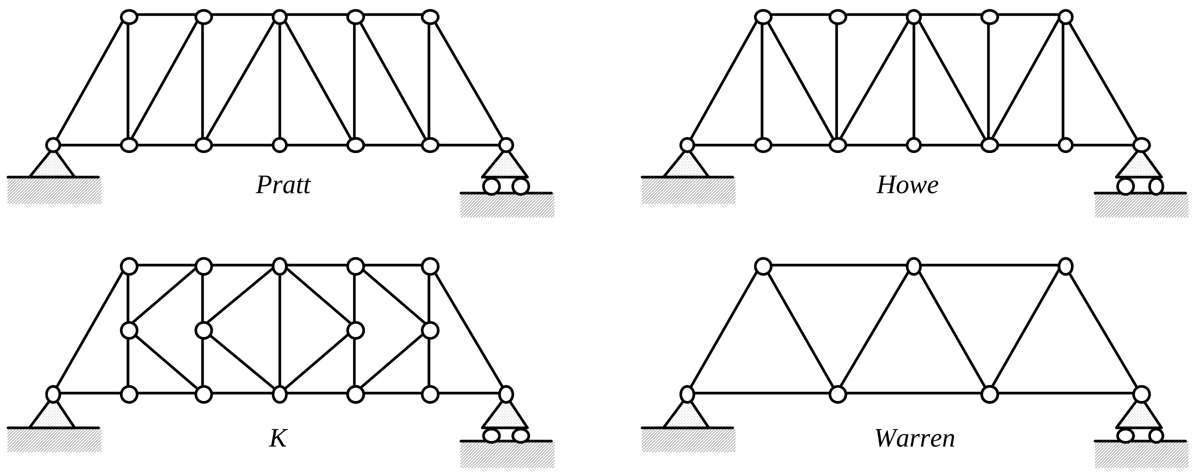


Fig. 4.5

4.1.5 Type de treillis

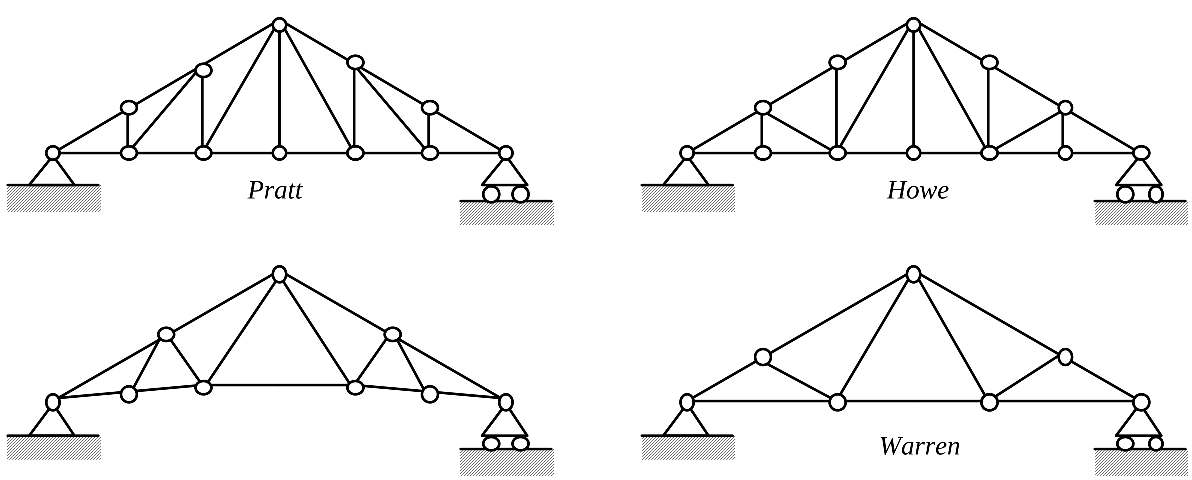
Les treillis peuvent être classés en plusieurs catégories comme par exemple:

1-Ferme de pont
2-Ferme de toit
3-Grue
4-Autres



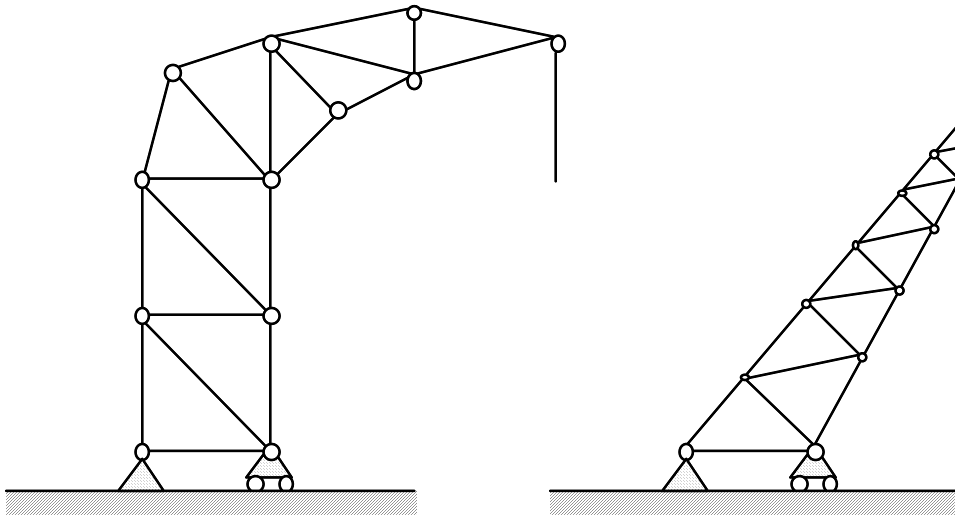
Fermes de pont

Fig. 4.6



Fermes de toit

Fig. 4.7



Grues

Fig. 4.8

4.1.6 Systèmes isostatiques et hyperstatiques

A Système isostatique

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est **égal** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit isostatique. On a un système possédant autant d'inconnues que d'équations donc on peut résoudre ce type de système.

Trois équations:

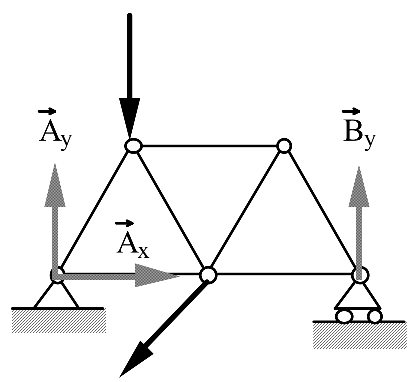
Équilibre de translation:

$$\sum F_x = 0 \qquad ①$$
$$\sum F_y = 0 \qquad ②$$

Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \qquad ③$$

Trois inconnues: $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$ **et** $\mathbf{B_y}$.

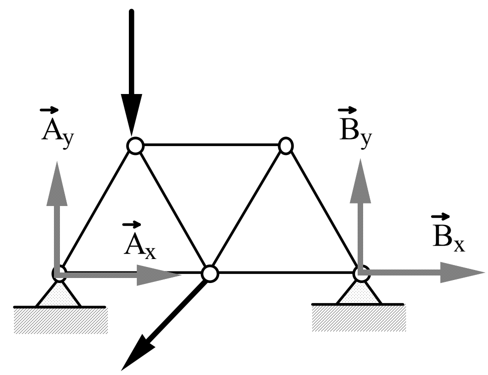


Système isostatique
3 équations
3 inconnues

Fig. 4.9

B Système hyperstatique

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est **supérieur** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit hyperstatique. On a un système possédant plus d'inconnues que d'équations donc on ne peut résoudre ce type de système par les méthode que l'on connaît.



Système hyperstatique
3 équations
4 inconnues

Fig. 4.10

Trois équations:

Équilibre de translation:

$$\sum F_x = 0 \qquad ①$$
$$\sum F_y = 0 \qquad ②$$

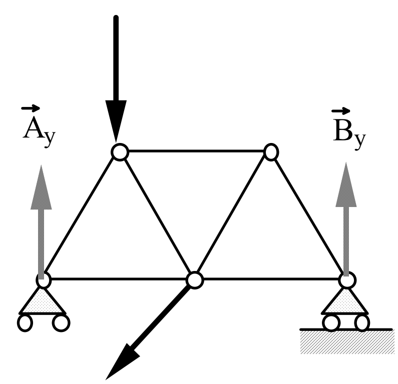
Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \qquad ③$$

Quatre inconnues: $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, $\mathbf{B_x}$ **et** $\mathbf{B_y}$

C Système instable

Si le nombre d'éléments inconnues des réactions d'appuis est **inférieur** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit instable. C'est par exemple le cas d'un système reposant sur deux appuis simple comme l'exemple ci-contre: la structure peut se déplacer latéralement.



Système instable
3 équations
2 inconnues

Fig. 4.11

Trois équations:

Équilibre de translation:

$$\sum F_x = 0 \qquad ①$$
$$\sum F_y = 0 \qquad ②$$

Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \qquad ③$$

Deux inconnues: $\mathbf{A_y}$ **et** $\mathbf{B_y}$.

4.2 FORCES INTERNES

4.2.1 Introduction

Le treillis est une structure en équilibre, donc chacune de ses parties et composantes (barres, noeuds et sections) est en équilibre. Afin de déterminer les forces internes de tension ou de compression dans les barres on a à notre disposition plusieurs méthodes qui se divisent en deux catégories:

1- <u>Méthodes des noeuds:</u>

  •Méthode analytique,

2- <u>Méthodes des coupes:</u>

  •Méthode analytique de Ritter,

4.2.2 Inspection du treillis

Avant d'entreprendre le calcul des contraintes dans les barres d'un treillis, il faut d'abord vérifier si ce treillis respecte la relation vue précédemment, à savoir:

$$\mathbf{m = 2n - 3}$$

Car si	$m < 2n - 3$	le treillis est mou (système instable)
et si	$m > 2n - 3$	le treillis est hyperstatique, c'est-à-dire qu'il contient plus de barres que nécessaire et nous n'étudierons pas ce cas ici.

Si **m = 2n - 3** est respectée, il faut alors vérifier si l'ordre de construction a été respecté. Le fait de déplacer une barre détruit la rigidité d'un treillis.

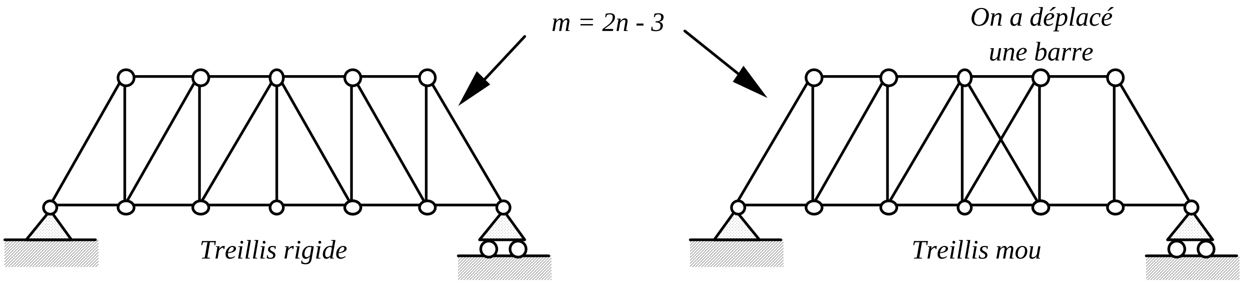


Fig. 4.12

4.2.3 Représentation des forces internes

L'action des forces externes sur une structure engendre des forces internes de tension ou de compression dans les barres de cette structure.

A <u>Force de tension (ou traction)</u>

Lorsque les forces externes, agissant par exemple sur les noeuds A et B d'une structure, tendent à allonger la barre AB, on dit que cette barre travaille en tension. Mais les forces externes provoquent les forces internes opposées de même grandeur, c'est le principe d'action et réaction. On représente donc une force de tension dans une barre en tirant sur ce noeud. La figure ci-contre illustre une force de tension dans une barre.

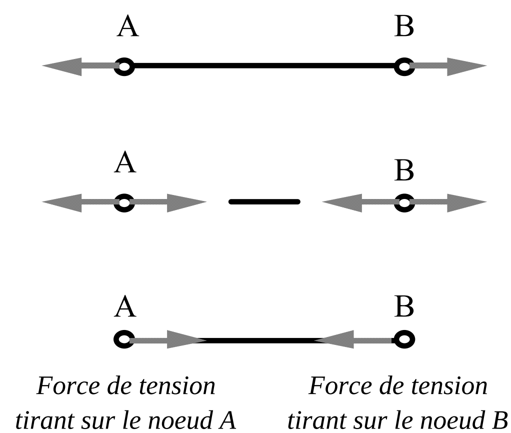


Fig. 4.13

B <u>Force de compression</u>

Lorsque les forces externes, agissant par exemple sur les noeuds A et B d'une structure, tendent à comprimer la barre AB, on dit que cette barre travaille en compression. Mais les forces externes provoquent les forces internes opposées de même grandeur, c'est le principe d'action et réaction. On représente donc une force de compression dans une barre en poussant sur ce noeud. La figure ci-contre illustre une force de compression dans une barre.

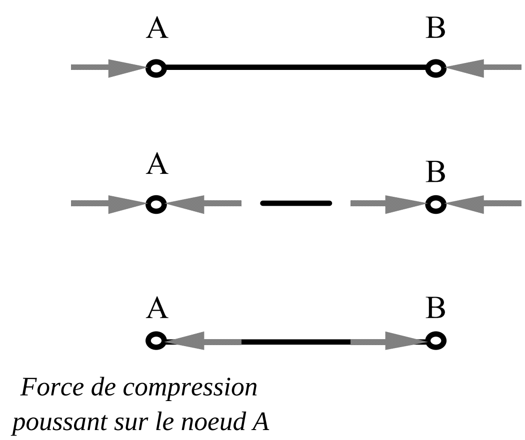


Fig. 4.14

4.2.4 Méthode analytique des noeuds

Cette méthode est basée sur le fait que chaque noeud isolé doit être en équilibre. Sur chaque barre, l'effort est nécessairement sur l'axe reliant les deux articulations. Par le fait même, les forces sur un noeud sont toujours concourantes. Donc, les efforts se rencontrent sur le noeud. En plus, on a vu que l'on ne peut charger un treillis sur une barre mais on peut sur le noeud donc, on en arrive à un système de forces concourantes autour des noeuds.

Les forces étant toutes concourantes, on n'a pas besoin de vérifier l'équilibre de rotation donc il ne nous reste que l'équilibre de translation; à savoir $\sum \mathbf{F_x = 0}$ et $\sum \mathbf{F_y = 0}$.

Ou si on travaillait avec les méthodes graphiques on dirait que le polygone de forces doit être fermé.

Méthode:

1- Trouver les réactions d'appuis.

$$\sum \mathbf{F_x = 0} \qquad ①$$
$$\sum \mathbf{F_y = 0} \qquad ②$$
$$\sum \mathbf{M = 0} \qquad ③$$

2- On équilibre successivement chacun des noeuds au moyens des équations d'équilibre de translation:

$$\sum \mathbf{F_x = 0} \qquad ①$$
$$\sum \mathbf{F_y = 0} \qquad ②$$

Remarque:

* On isole le noeud en laissant les charges qui s'exercent sur lui et en remplaçant toutes les barres qui s'y rattachent par leurs efforts supposés en tension.

* On avance de noeud en noeud de manière qu'à chaque noeud il y ait seulement <u>deux</u> barres dont les forces internes sont encore inconnues.

EXEMPLE 4.1 *Trouvez les contraintes dans toutes les barres du treillis suivant.*

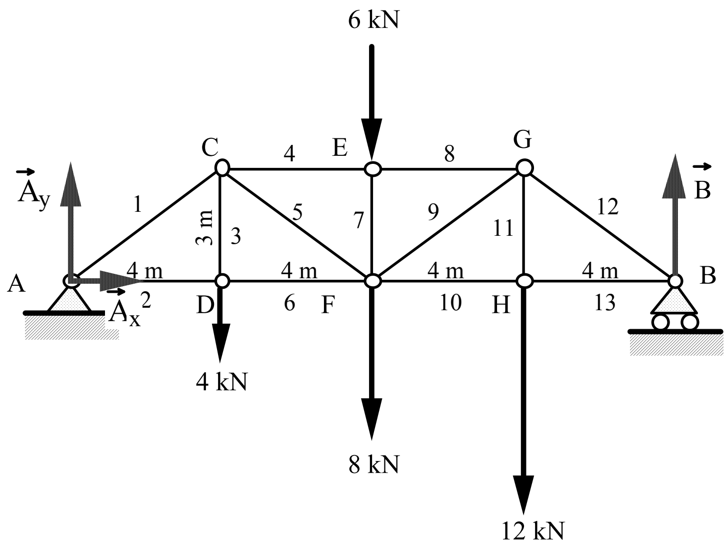


Fig. 4.15

Solution:

1- Trouvons les réactions d'appuis.

$$\sum M_A = -(4000 \times 4) - (8000 \times 8) - (6000 \times 8) - (12000 \times 12) + (B \times 16) = 0$$

$$16B = 16000 + 64000 + 48000 + 144000$$

$$B = \frac{272000}{16}$$

D'où **B = 17000 N**

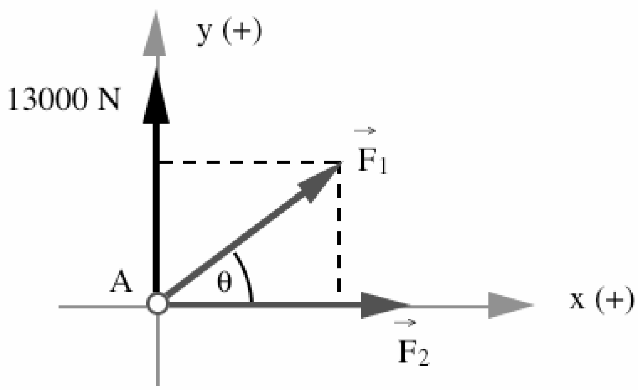
$$\sum F_x = A_x = 0$$

$$\sum F_y = A_y - 4000 - 8000 - 6000 - 12000 + 17000 = 0$$

D'où $\mathbf{A_y} = 4000 + 8000 + 6000 + 12000 - 17000 =$ **13000 N**

2-Équilibre des noeuds

Noeud A: Remplaçons l'articulation par A_y et les barres 1 et 2 par des efforts F_1 et F_2 en tension.



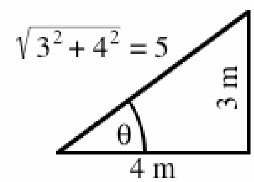


Fig. 4.16

$\sum F_x = F_1 \cos\theta + F_2 = F_1(4/5) + F_2 = 0$ D'où $F_2 = -(4/5)F_1$

$\sum F_y = F_1 \sin\theta + 13000 = 0$ donc $F_1(3/5) = -13000$

D'où $\mathbf{F_1} = -(5/3)13000 = \mathbf{-21667\ N}$

Donc $\mathbf{F_2} = -(4/5)(-21667) = \mathbf{17333\ N}$

Barre 1 =	**21667 N**	**C**
Barre 2 =	**17333 N**	**T**

Noeud D: Remplaçons la barre 2 par son effort, la barre 3 par un effort F_3 supposé en tension et la barre 6 par un effort F_6 supposé en tension.

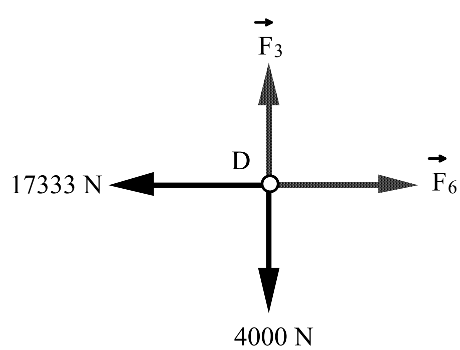


Fig. 4.17

$\sum F_x = F_6 - 17333 = 0$ d'où $\mathbf{F_6 = 17333\ N}$

$\sum F_y = F_3 - 4000 = 0$ d'où $\mathbf{F_3 = 4000\ N}$

Barre 3 =	**4000 N**	**T**
Barre 6 =	**17333 N**	**T**

Noeud C: Remplaçons les barres 1 et 3 par leurs efforts, la barre 4 par un effort F_4 supposé en tension et la barre 5 par un effort F_5 supposé en tension.

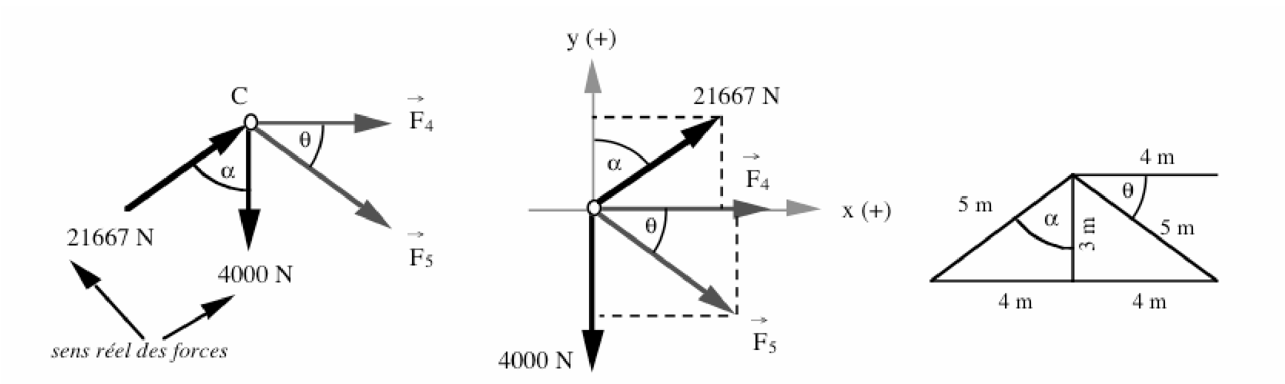


Fig. 4.18

$\sum F_x = F_4 + 21667\sin\alpha + F_5\cos\theta = F_4 + 21667(4/5) + F_5(4/5) = 0$

D'où $F_4 = -(4/5)F_5 - 17333$ ①

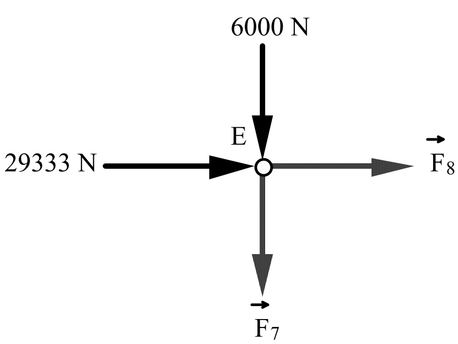
$\sum F_y = 21667\cos\alpha - 4000 - F_5\sin\theta = 21667(3/5) - 4000 - F_5(3/5) = 0$

$(3/5)F_5 = 13000 - 4000$ D'où $\mathbf{F_5 = 15000\ N}$

F_5 dans ℵ $F_4 = -(4/5)(15000) - 17333$ D'où $\mathbf{F_4 = -29333\ N}$

Barre 4 = **29333 N** **C**
Barre 5 = **15000 N** **T**

Noeud E: Remplaçons la barre 4 par son effort (29333 N compression), la barre 7 par un effort F_7 supposé en tension et la barre 8 par un effort F_8 supposé en tension.



$\sum F_x = F_8 + 29333 = 0$ d'où $\mathbf{F_8 = -29333\ N}$

$\sum F_y = -F_7 - 6000 = 0$ d'où $\mathbf{F_7 = -6000\ N}$

<u>Barre 7</u> = **6000 N** **C**
<u>Barre 8</u> = **29333 N** **C**

Fig. 4.19

Noeud F: Remplaçons les barres 5, 6 et 7 par leurs efforts, la barre 9 par un effort F_9 supposé en tension et la barre 10 par un effort F_{10} supposé en tension.

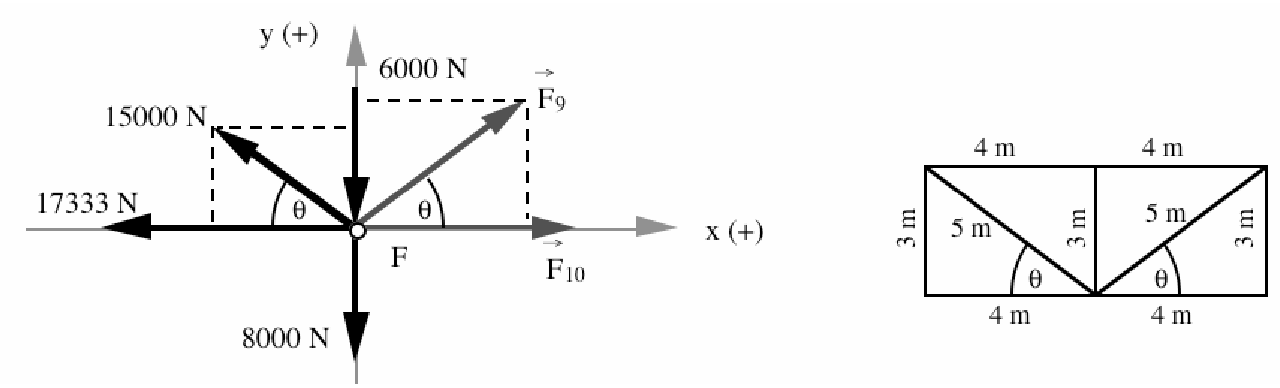


Fig. 4.20

$\sum F_x = -17333 - 15000\cos\theta + F_9\cos\theta + F_{10} = -17333 - 15000(4/5) + F_9(4/5) + F_{10} = 0$

D'où $F_{10} = -(4/5)F_9 - 29333$ ①

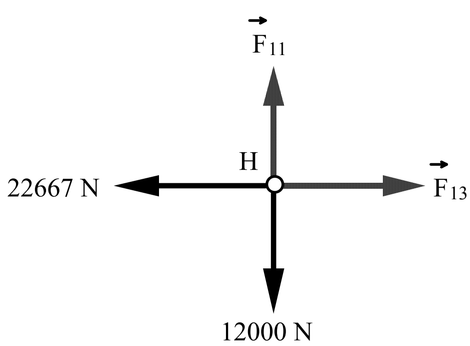
$\sum F_y = 15000\sin\theta - 6000 - 8000 + F_9\sin\theta = 15000(3/5) - 14000 + F_9(3/5) = 0$
$(3/5)F_9 = 14000 - 9000 = 5000$

D'où $\mathbf{F_9 = 8333\ N}$

F_9 dans ℵ $F_{10} = -(4/5)(8333) + 29333$ D'où $\mathbf{F_{10} = 22667\ N}$

Barre 9 =	**8333 N**	**T**
Barre 10 =	**22667 N**	**T**

Noeud H: Remplaçons la barre 10 par son effort, la barre 11 par un effort F_{11} supposé en tension et la barre 13 par un effort F_{13} supposé en tension.



$\sum F_x = F_{13} - 22667 = 0$ d'où $\mathbf{F_{13} = 22667\ N}$

$\sum F_y = F_{11} - 12000 = 0$ d'où $\mathbf{F_{11} = 12000\ N}$

Barre 11 =	**12000 N**	**T**
Barre 13 =	**22667 N**	**T**

Fig. 4.21

Noeud G: Remplaçons les barres 8 et 9 par leurs efforts, et la barre 12 par un effort F_{12} supposé en tension.

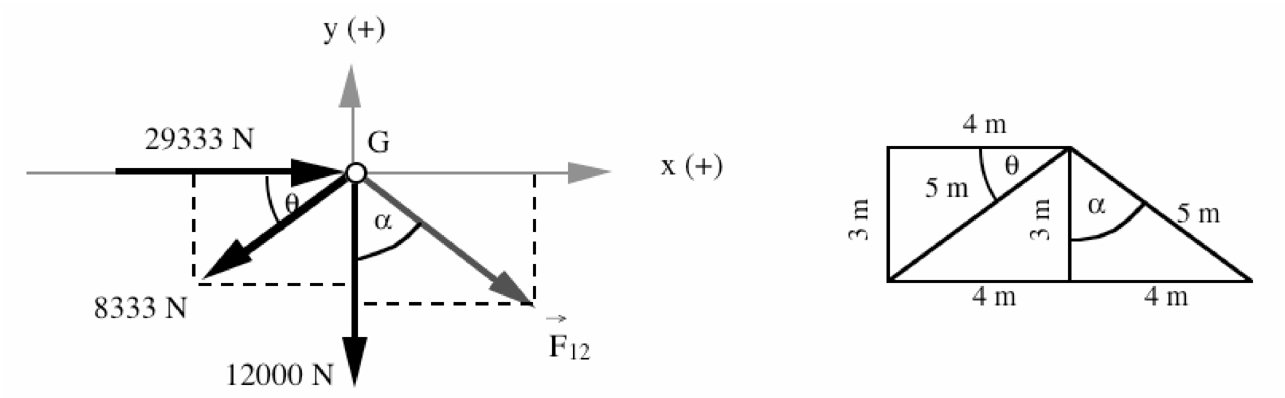


Fig. 4.22

$\sum F_x = 29333 - 8333\cos\theta + F_{12}\sin\alpha = 29333 - 8333(4/5) + (4/5)F_{12} = 0$

D'où **F_{12} = -28333 N**

$\sum F_y = -8333\sin\theta - 12000 - F_{12}\cos\alpha = -8333(3/5) - 12000 - (3/5)F_{12} = 0$

D'où **F_{12} = -28333 N** (preuve)

Barre 12 = **28333 N C**

Noeud B: **Vérification**; Si les valeurs trouvées pour F_{12} et F_{13} par le calcul successif de toutes les barres sont exactes, les autres valeurs le seront également.

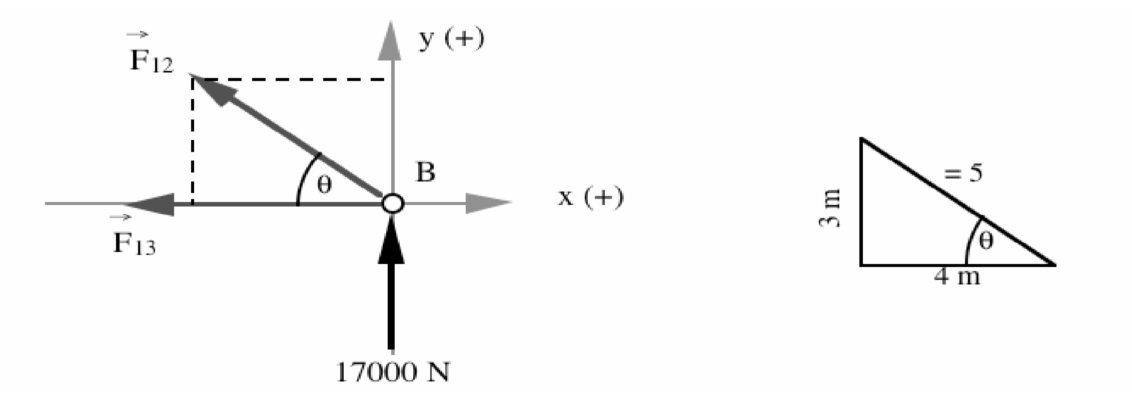


Fig. 4.23

$\sum F_y = F_{12}\sin\theta + 17000 = F_{12}(3/5) + 17000 = 0$ D'où **F_{12} = -28333 N**

$\sum F_x = -F_{12}\sin\theta - F_{13} = 0$ => $F_{13} = -(4/5)F_{12} = -(4/5)(-28333)$

D'où **F_{13} = 22667 N**

Les **mêmes** valeurs (F_{12} et F_{13}) trouvées par l'étude des noeuds G et H.

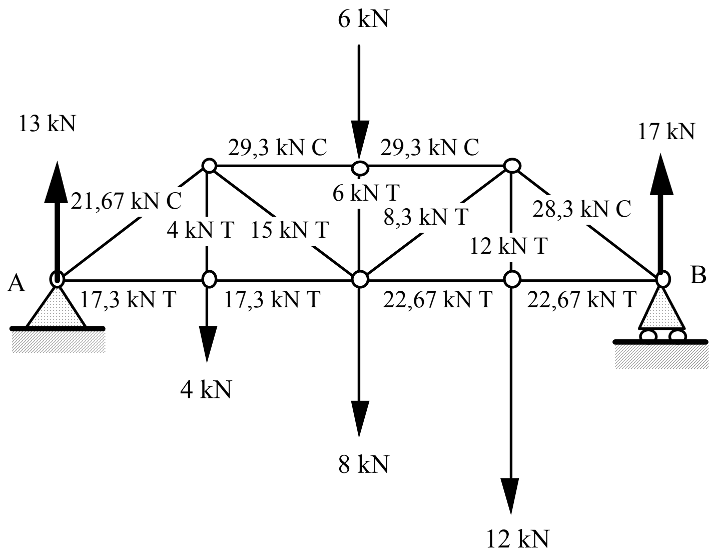


Fig. 4.24

Tableau des résultats

A	13000 N	
B	17000 N	
F_1	21667 N	Compression
F_2	17333 N	Tension
F_3	4000 N	Tension
F_4	29333 N	Compression
F_5	15000 N	Tension
F_6	17333 N	Tension
F_7	6000 N	Compression
F_8	29333 N	Compression
F_9	8333 N	Tension
F_{10}	22667 N	Tension
F_{11}	12000 N	Tension
F_{12}	28333 N	Compression
F_{13}	22667 N	Tension

4.2.5 Méthode (analytique) des coupes de Ritter

On a souvent besoin de connaître seulement la force interne dans une barre bien déterminée de la structure considérée (par exemple, une barre cassée ou en mauvais état que l'on doit réparer ou changer). Dans ce cas, il serait fastidieux d'utiliser la méthode analytique des nœuds.

De plus, s'il y a en un noeud plus de deux barres dont les forces internes sont encore inconnues, la méthode analytique des noeuds deviennent inutilisables.

Si tel est le cas, la méthode des coupes de Ritter s'impose. C'est une méthode analytique, appelée aussi méthode des sections ou des moments.

La méthode de Ritter est basée sur l'équilibre d'une partie isolée de la structure considérée.

Méthode:

1- Trouver les réactions d'appuis.

$$\sum \mathbf{F_x = 0}$$
$$\sum \mathbf{F_y = 0}$$
$$\sum \mathbf{M = 0}$$

2- On isole une partie de la structure considérée par une ligne imaginaire que coupe **au maximum trois barres** dont on veut calculer les forces internes.

3- On considère la partie isolée comme un corps en équilibre. On suppose les barres coupées en tension et on applique l'équilibre de rotation et de translation:

$$\sum \mathbf{M = 0}^*$$
$$\sum \mathbf{F_x = 0}$$
$$\sum \mathbf{F_y = 0}$$

*On choisit un noeud comme axe de rotation.

EXEMPLE 4.2 *Trouvez les contraintes dans les barres 4, 5 et 6 puis dans 12 et 13 du treillis suivant.*

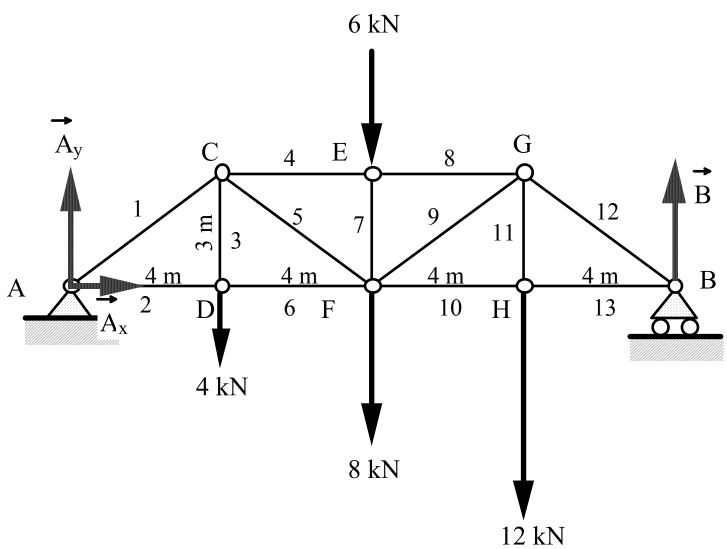


Fig. 4.25

Solution:

1- Trouvons les réactions d'appuis.

$$\sum M_A = -(4000 \text{ x } 4) - (8000 \text{ x } 8) - (6000 \text{ x } 8) - (12000 \text{ x } 12) + (B \text{ x } 16) = 0$$

D'où **B = 17000 N**

$$\sum F_x = \mathbf{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = A_y - 4000 - 8000 - 6000 - 12000 + 17000 = 0$$

D'où $\mathbf{A_y}$ = **13000 N**

2- Isolons les structures à étudier.

Nous choisirons ici la petite coupe de gauche pour les barres 4, 5 et 6 (voir *fig. 4.25*) tandis que nous choisirons la grande coupe de gauche pour les barres 12 et 13. Nous ne pouvons pas utiliser la coupe de droite pour les barres 12 et 13 car il n'y a qu'un noeud et donc toutes les forces sont concourantes. Ce qui signifie que nous ne pourrions pas utiliser l'équilibre de rotation $\sum M$. Par contre, ici, ce serait sûrement plus facile d'utiliser la **méthode des noeuds** pour les barres 12 et 13 mais nous le ferons tout de même par la méthode des coupes.

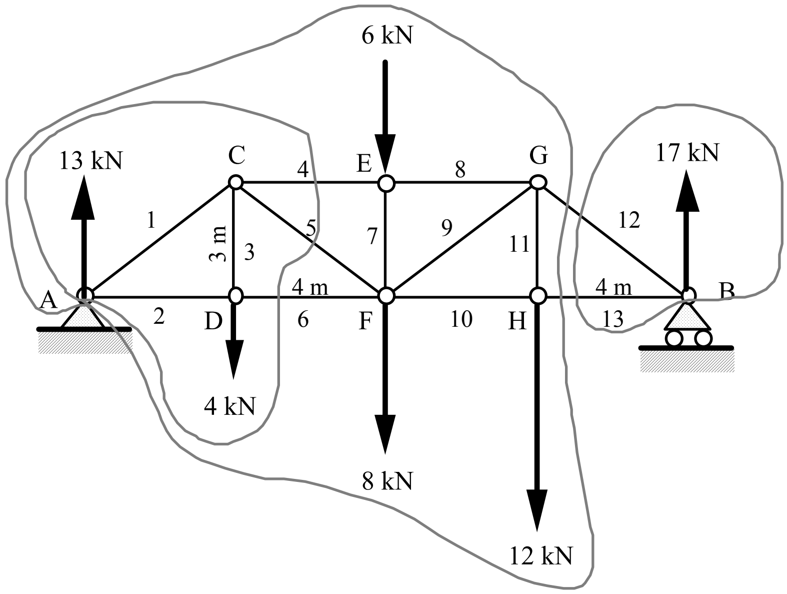


Fig. 4.26

3- Première coupe: Choisissons premièrement le noeud C comme axe de rotation, par le noeud C on élimine les variables F_4 et F_5.

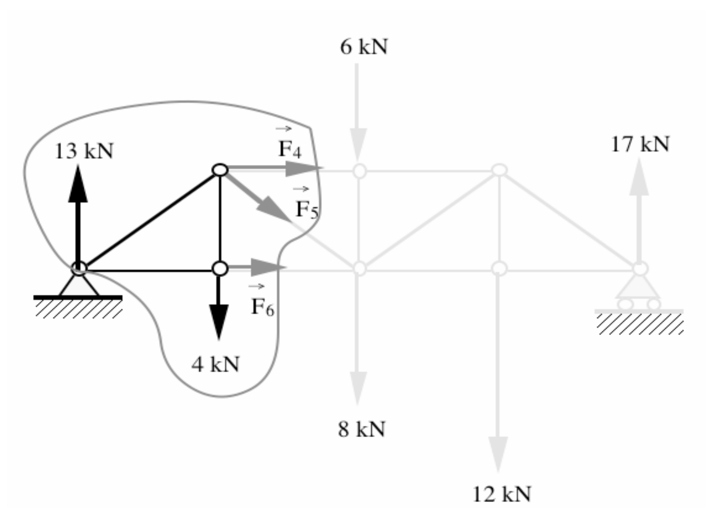


Fig. 4.27

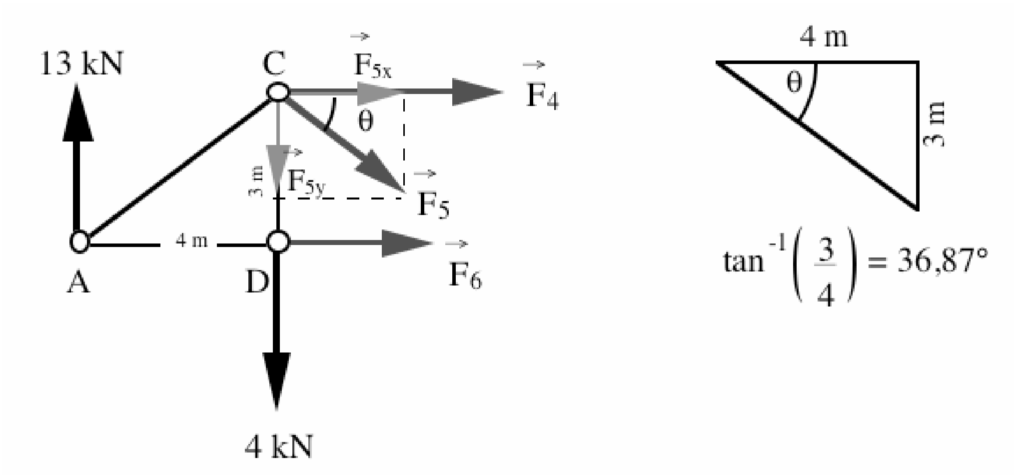


Fig. 4.28

$\sum M_C = -(13000 \text{ x } 4) + (F_6 \text{ x } 3) = 0$ D'où $\mathbf{F_6 = 17333\ N}$

$\sum F_y = -F_{5y} + 13000 - 4000 = -F_5 \sin 36{,}87 + 9000 = 0$

D'où $\mathbf{F_5 = 15000\ N}$

$\sum F_x = F_{5x} + F_6 + F_4 = 15000 \cos 36{,}87 + 17333 + F_4 = 0$

D'où $\mathbf{F_4 = -29333\ N}$ *(Exactement les mêmes résultats que ceux retrouvés dans l'exemple précédent.)*

4- Seconde coupe: Choisissons premièrement le noeud H, par le noeud H on élimine la variable F_{13}.

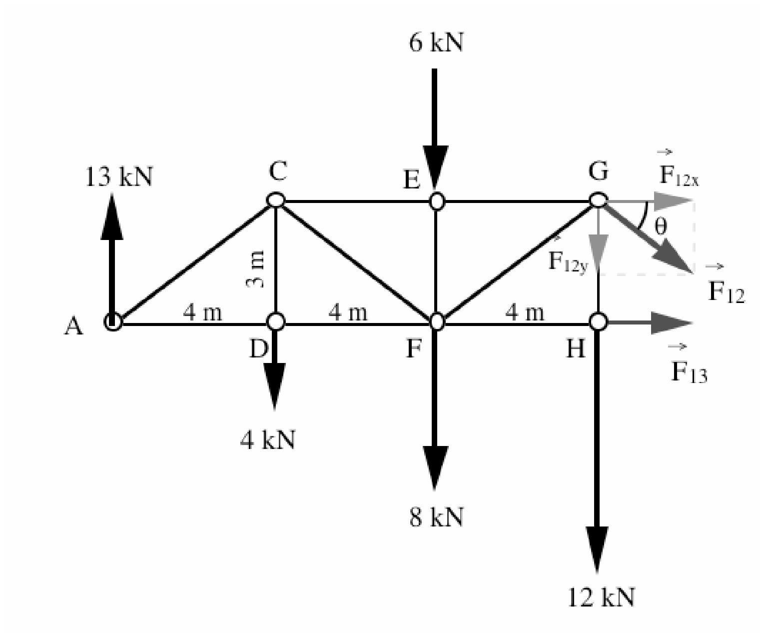


Fig. 4.29

$\sum M_H =$ $-(13000 \times 12) + (4000 \times 8) + (6000 \times 4) + (8000 \times 4) - (F_{12x} \times 3) = 0$

$3F_{12x} = -156000 + 32000 + 24000 + 32000$

$3F_{12}\cos 36{,}87 = -68000$

D'où **F_{12} = -28333 N**

$\sum F_x = F_{12x} + F_{13} = 0$

$F_{13} = -F_{12x} = -F_{12}\cos 36{,}87$

D'où **F_{13}** = -(-28333)cos 36,87 **= 22667 N**

(Exactement encore ici les mêmes valeurs que celles retrouvées dans l'exemple précédent.)

On aurait pu aussi résoudre entièrement le problème en utilisant la somme des moments ($\sum M = 0$) en changeant l'axe de rotation. Mais il est souvent plus facile de passer par les forces afin de trouver les contraintes cherchées.

Quand on effectue l'équilibre de rotation, on peut choisir un noeud situé à l'extérieur de la partie sélectionnée et résoudre le problème de la même façon. Par exemple dans la première section, on aurait pu poursuivre après la première somme des moments autour du noeud C la somme des moments sur le noeud F; ainsi on aurait éliminé immédiatement les forces F_5 et F_6.

$$\sum M_F = -(13000 \times 8) + (4000 \times 4) - (F_4 \times 3) = 0$$

$$3F_4 = 16000 - 104000$$

$$F_4 = (-88000)/3 = -29333 \text{ N}$$

Même résultat que trouvé précédemment. Lorsque l'on est parfaitement à l'aise avec le calcul des moments, on peut presque toujours choisir un noeud qui éliminera deux des trois variables cherchées et ainsi on peut trouver une à une les contraintes cherchées. C'est pour cela que l'on appelle aussi cette méthode la méthode des moments.

Ce que nous venons de voir n'est qu'une étape dans la conception d'une structure. Il faudra par la suite déterminer la forme et la grosseur des membres par la résistance des matériaux et ajouter le poids des membrures dans le calcul des contraintes. Enfin il faudra faire l'étude des joints eux-mêmes (rivetage, soudure, boulons).