3
ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS

3.1 MOMENT D'UNE FORCE

3.1.1 Introduction

Un corps n'est pas seulement en équilibre que lorsque la sommation des forces est nulle. Par exemple, dans la figure ci-contre, la force résultante est nulle. Par contre, ce corps n'est pas en équilibre car il peut tourner. Ceci nous amène à définir un autre concept que la force pour étudier l'équilibre statique des corps. Ce concept fait appel à la notion de moment de force.

En effet, dans l'étude de l'équilibre des corps les notions de grandeur, direction et sens des forces sont importantes mais une quatrième l'est tout aussi; celle du point d'application des forces.

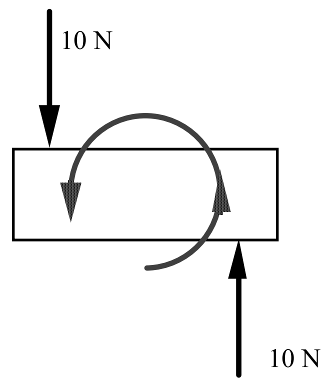


Fig. 3.1

3.1.2 Définition

Lorsque l'on veut ouvrir une porte, on tire sur la poignée en espérant que la porte effectue un mouvement de rotation autour de ses charnières. Cependant, qu'arriverait-il si la poignée était située au centre de la porte? Évidemment, la porte serait plus difficile à ouvrir.

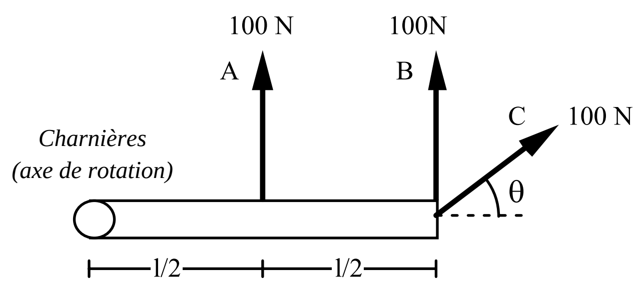


Fig. 3.2

En observant la *figure 3.2* on peut voir que pour une même force, l'**efficacité** à ouvrir la porte n'est pas la même. On peut dire qu'il serait plus facile d'ouvrir la porte avec la force B que la A ou la C. Avec cet exemple on voit bien l'importance du point d'application de la force.

On définira donc le moment d'une force comme:

> "*l'efficacité d'une force à produire une rotation par rapport à un point*".

Le moment de force est une quantité vectorielle mais nous n'en tiendrons pas compte complètement dans notre étude de la statique. C'est la grandeur du moment ainsi qu'un signe + ou - qui le définira. Le signe du moment sera déterminé par rapport à une convention que l'on verra plus loin.

3.1.3 Calcul du moment

Si on observe cet autre exemple, on s'apperçoit que pour un même point d'application ce n'est pas nécessairement toute la force qui produit la rotation. Ainsi, la composante horizontale de la force $\mathbf{A_x}$ **ne produit aucune rotation** par rapport à l'axe de rotation que représente les charnières. Par contre, la composante verticale de la force $\mathbf{A_y}$ **produit à elle seule "toute" la rotation**.

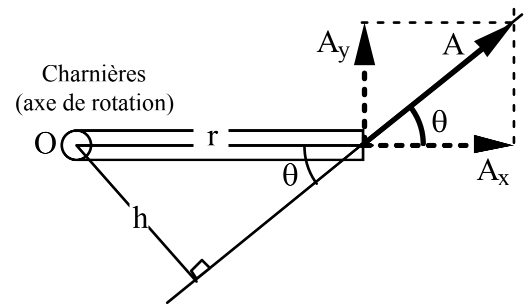


Fig. 3.3

À partir de ces observations on peut définir de façon opérationnelle le **moment d'une force** par rapport à un axe de rotation comme étant:

> "Le produit de la grandeur de la force multipliée par la distance entre sa ligne d'action et l'axe de rotation considéré"

Note importante, la distance ou bras de levier est mesurée **perpendiculairement** à la ligne d'action de la force.

On calcule le moment de la force par rapport à l'axe de rotation "O" de la *figure 3.3* comme:

$$M_o = \textbf{Force x bras de levier} \text{ (perpendiculaire)}$$
$$= \mathbf{A \times h} \qquad (3.1)$$

Pour le calcul du moment à partir d'un dessin (méthode graphique), cette méthode est relativement facile à utiliser. Cependant, pour le calcul analytique du moment, il est parfois difficile de calculer le "bras de levier" **h**. On note toujours le moment M indicé de l'axe de rotation "O" par rapport à lequelle on mesure le moment i.e. M_o.

À partir des lois de la trigonométrie on peut déduire que:

$$h = r \sin \theta$$

Donc $$M_o = A \times r \sin \theta \qquad \text{(a)}$$

De même, si on observe les composantes de A, on a vu que:

$$A_x = A \cos \theta$$
$$A_y = A \sin \theta$$

Comme on voit et comme on a défini, le moment de la force est le produit de la force multipliée par le bras de levier mesuré perpendiculairement. **La composante horizontale de A (A_x) ne possède pas de bras de levier (sa ligne d'action passe par "O"; h = 0) donc son moment est nécessairement égal à 0 aussi**. La composante verticale de A (A_y) est déjà perpendiculaire au bras de levier "r" donc son moment est égal à:

$$M_o = A_y \times r$$

Comme $A_y = A \sin \theta$ alors: $$M_o = A \sin \theta \times r \qquad \text{(b)}$$

La comparaison des équations (a) et (b) nous montre qu'elles sont identiques. Et comme le moment dû à la composante horizontale est égal à zéro donc la somme des moments des composantes nous donne le même résultat. On peut donc conclure que:

"*Le moment d'une force peut être calculé par la somme des moments des composantes de cette force*".

Les **unités** du moment d'une force sont: Force [N] x bras de levier [m] donc des **[Nm]**.

On utilisera aussi comme convention de signe (puisque comme on l'a vu précédemment, le moment est un vecteur) que lorsque la force aura tendance à faire tourner **anti-horaire** un corps autour d'un axe quelconque son moment sera **+** alors que s'il a tendance à tourner **horaire** ce moment sera **-**. Cette convention sera utile lorsque l'on calculera le moment total ou résultant sur un corps.

Il est à noter que certains auteurs utilisent d'autres conventions (ex: convention inverse ou changement de convention à chaque cas ou autre ...) mais pour simplifier le language et avoir tous la même terminologie on conservera cette convention jusqu'à la fin.

En résumé:

Moment d'une force (M_o) = force x bras de levier (perpendiculaire) **[Nm] ou**
$\sum$ moments des composantes de cette force

Moment résultant ($\sum M_0$) = $\sum$ des moments de chacune des forces
ou
$\sum$ des moments des composantes des forces

M_o **(+)** => Le corps a tendance à tourner **anti-horaire** autour de "O"

M_o **(-)** => Le corps a tendance à tourner **horaire** autour de "O"

On calcul toujours un moment par rapport à un axe de rotation quelconque, exemple l'axe "O" on notera alors le moment M_o.

3.2 COUPLE

3.2.1 Définition

Dans la pratique, on retrouve plusieurs exemples de couples; lorsqu'on ouvre un robinet ou lorsqu'on visse un écrou, on exerce un couple.

On définit le couple comme étant:

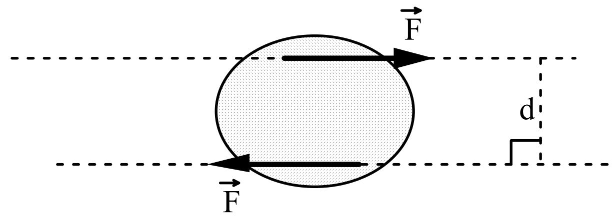


Fig. 3.4

> Un système de deux forces parallèles, d'égales grandeurs, de sens opposés et de lignes d'action différentes.

La distance perpendiculaire "**d**" séparant les deux forces s'appelle bras de levier du couple.

3.2.2 Valeur du couple

Le moment du couple est égal à la grandeur de l'une des forces par la distance (mesurée perpendiculairement) entre leurs lignes d'action.

$$\mathbf{M = Fd} \qquad \textit{(3.2)}$$

Le moment du couple est indépendant de l'axe de rotation considéré. Comme par exemple dans la figure ci-contre le moment est donné par:

- F x d.(horaire)

Vérifions en calculant le moment résultant de ces deux forces du couple par rapport aux trois axes de rotation A, B et C.

$$\mathbf{M_A} = Fs - F(s + d)$$
$$Fs - Fs - Fd = \mathbf{-Fd}$$

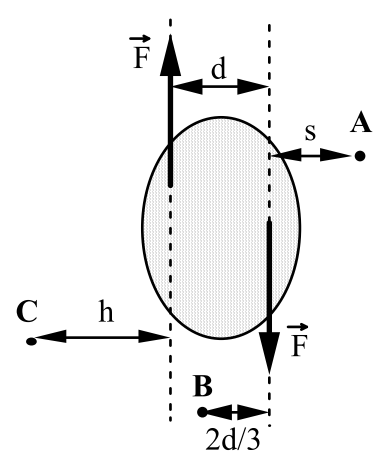


Fig. 3.5

$$\mathbf{M_B} = -Fd/3 - F2d/3 = \mathbf{-Fd}$$

$$\mathbf{M_C} = Fh - F(h + d)$$
$$Fh - Fh - Fd = \mathbf{-Fd}$$

On voit très bien que quelque soit l'axe de rotation, le moment du couple est le même et vaut la grandeur de la force multipliée par la distance les séparant.

3.2.3 Couples équivalents

Deux couples sont équivalents s'ils ont le même moment (grandeur et sens); on peut donc les remplacer en tout temps sans changer l'effet produit sur le corps. Si on observe la figure ci-dessous, on a un exemple de trois couples équivalents, on peut alors voir l'importance du "bras de levier". On produit exactement la même rotation avec une force F espacée d'une distance d qu'avec une force coupée de moitié F/2 espacée du double (2d).

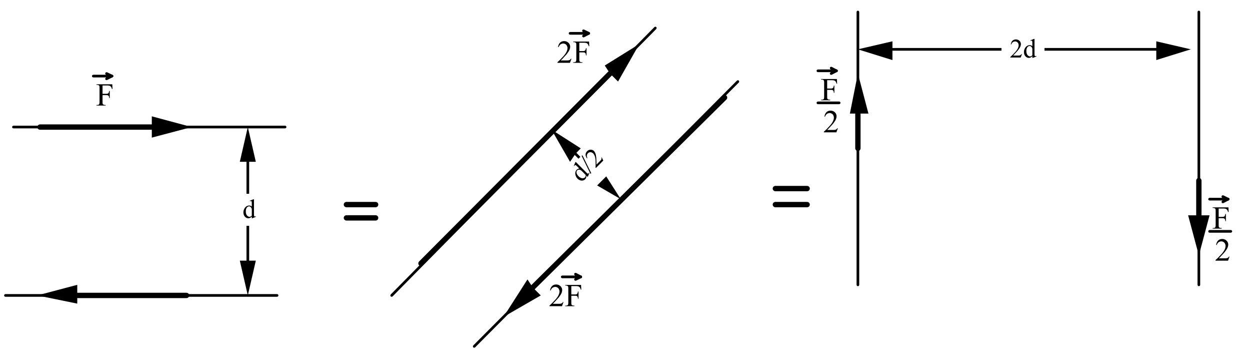


Fig. 3.6

Dans chacun des cas illustrés à la *figure 3.6* le moment vaut -Fd (**-** car horaire).

3.3 PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA STATIQUE

3.3.1 Premier principe

On peut faire glisser une force sur sa ligne d'action, sans changer son effet sur un corps. Ce principe est appelé théorème du glissement.

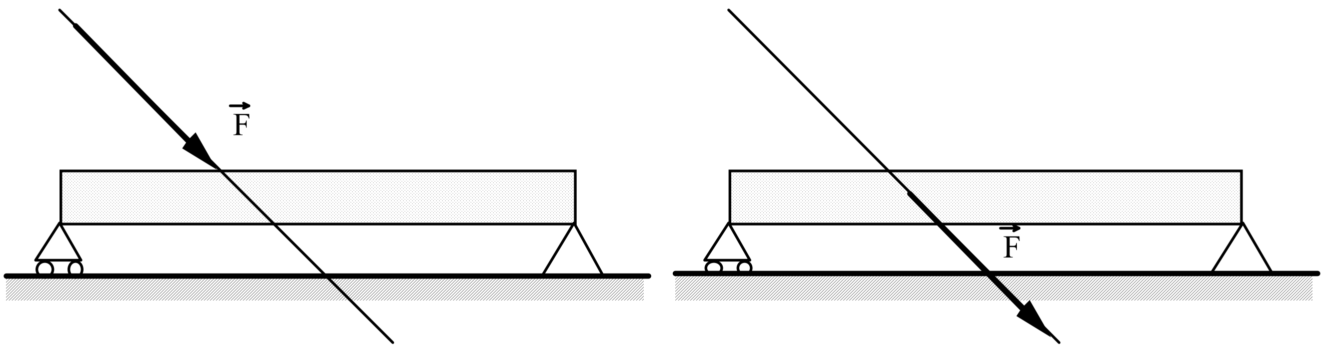


Fig. 3.7

3.3.2 Deuxième principe

La ligne d'action de la résultante d'un système de force concourantes doit passer nécessairement par le point de rencontre des lignes d'action de ces forces.

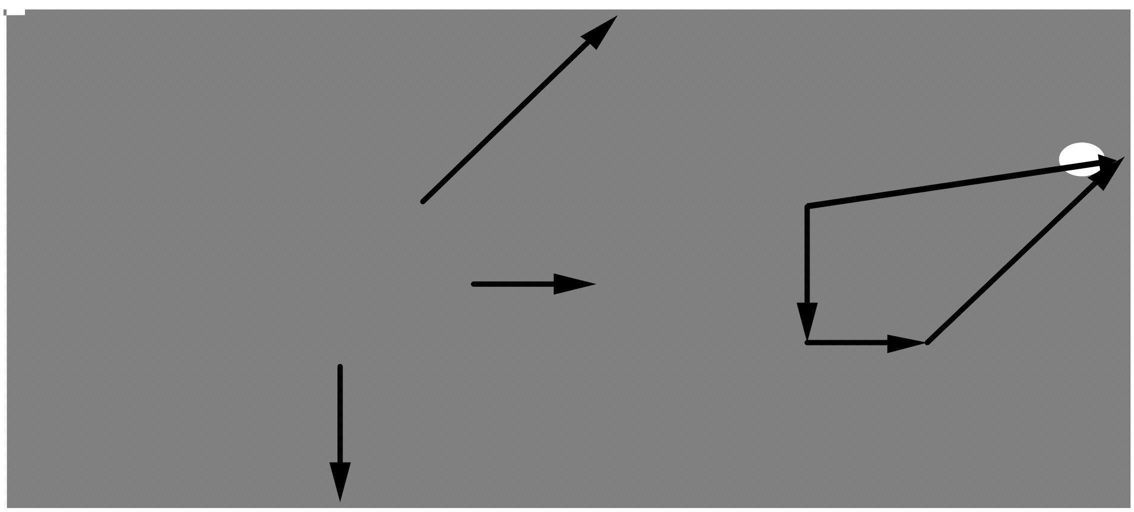


Fig. 3.8

3.3.3 Troisième principe

On peut remplacer plusieurs forces quelconques par leur résultante sans changer leur effet sur un corps. (voir aussi fig. 3.8)

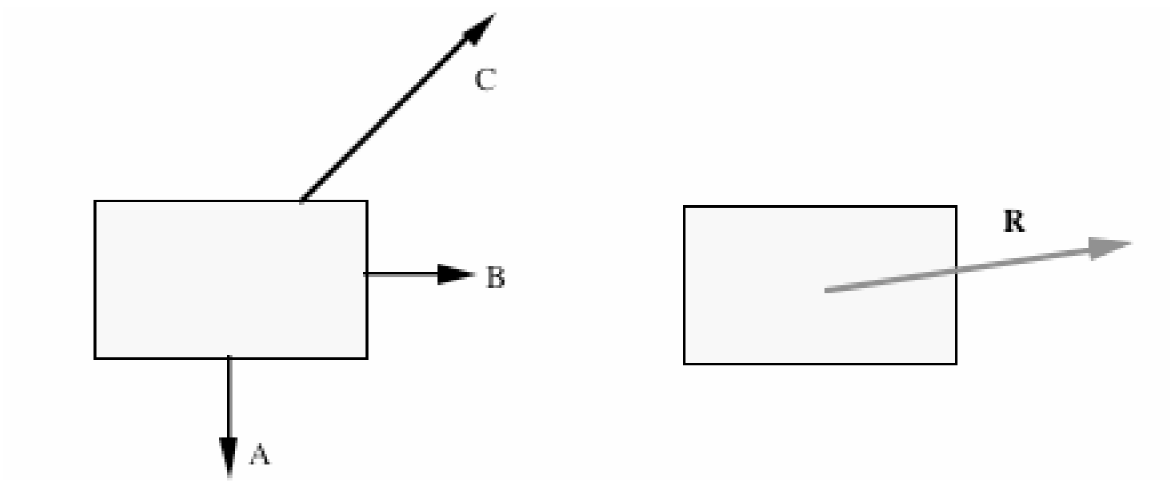
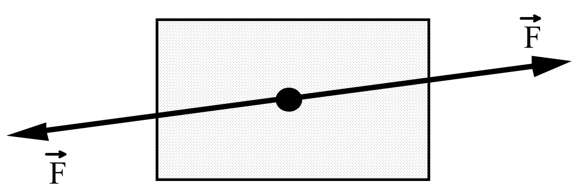


Fig. 3.9

3.3.4 Quatrième principe

On peut appliquer en un point quelconque d'un corps deux for-ces égales et directement opposées sans déranger l'état de ce corps.



$\vec{F} = -\vec{F}$

Fig. 3.10

3.3.5 Cinquième principe

Lorsqu'un corps A exerce une force sur un corps B, celui-ci exerce toujours sur le corps A une force égale en grandeur mais directement opposée. On appelle ce principe action et réaction.

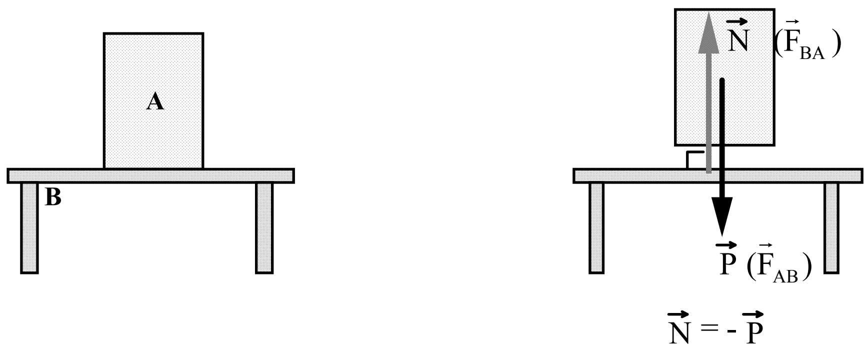


Fig. 3.11

La force F_{AB} (force exercée sur A par rapport à B) serait l'action tandis que la force F_{BA} (force exercée sur B par rapport à A) la réaction. L'action et la réaction sont des forces s'exerçant toujours en paires.

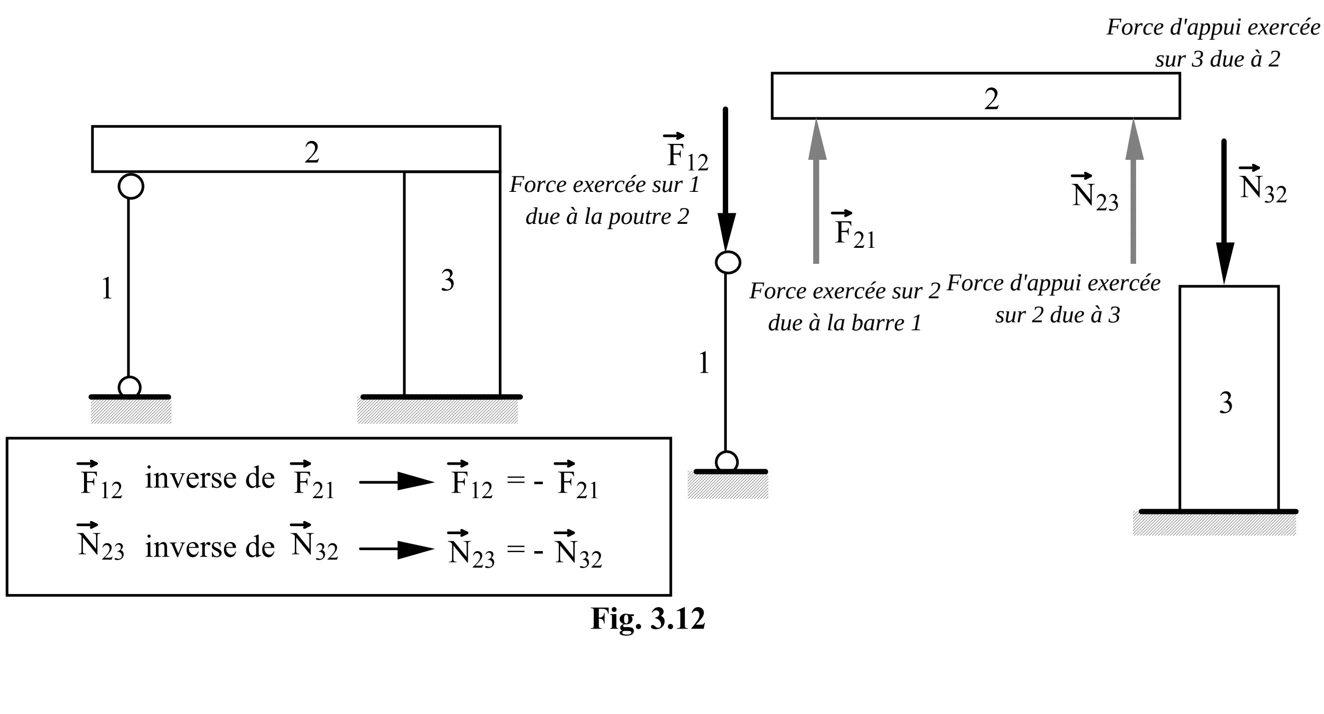


Fig. 3.12

3.4 APPUIS ET LIAISONS

En statique, il est important d'identifier toutes les forces agissant sur le corps que l'on veut étudier et plus spécialement les liaisons et les réactions d'appui.

3.4.1 Liaisons simples

A Fil

=> Effort possible seulement en *traction*.

=> Ligne d'action de la force donnée par la direction du fil.

Une seule inconnue:

➪ **Grandeur** de la force

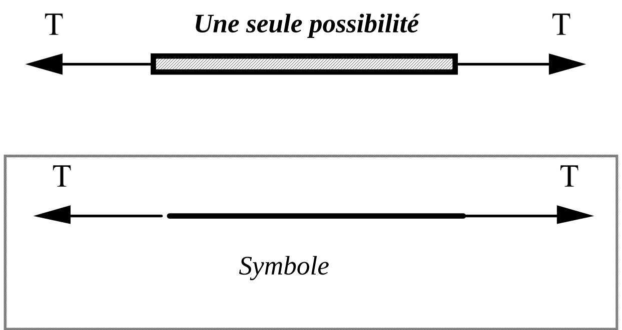


Fig. 3.13

B Barre articulée

Barre dont chacune des extrémités est fixée par une articulation et qui ne supporte aucun effort entre ses extrémités.

=> Effort possible en *traction* ou *compression*.

=> Ligne d'action de la force donnée par la droite qui passe par les deux articulations.

Deux inconnues:

➪ **Grandeur** et
➪ **Sens** de la force

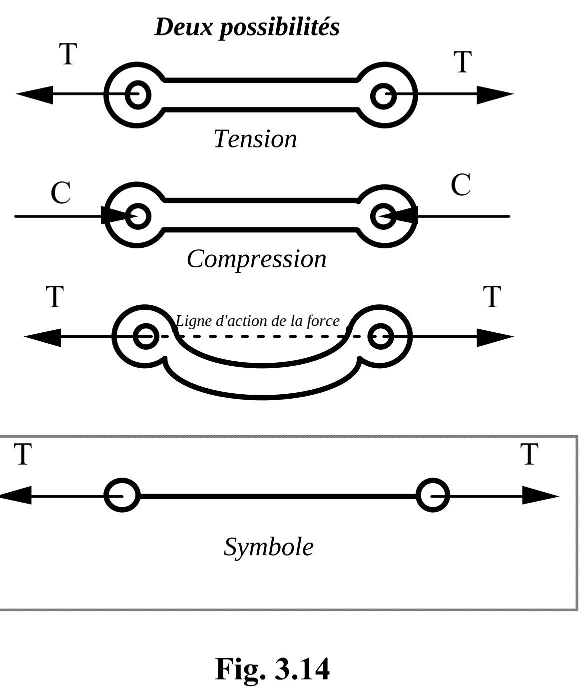


Fig. 3.14

*Convention: Si la barre subit un effort de 100 N en tension, on écrit:

F = 100 N ou 100 N **T**

Si la barre subit un effort en 100 N en compression, on écrit:

F = -100 N ou 100 N **C**

C <u>Articulation simple</u>

Rotule ou charnière fixant un corps à un mur, à un plancher ou au sol.

=> Effort possible: la force peut être dans n'importe quelle direction. La force passe par l'articulation.

=> Ligne d'action de la force donnée passe par l'articulation.

<u>Trois inconnues</u>:

- ⇨ **Grandeur**
- ⇨ **Sens** et
- ⇨ **Direction** de la force

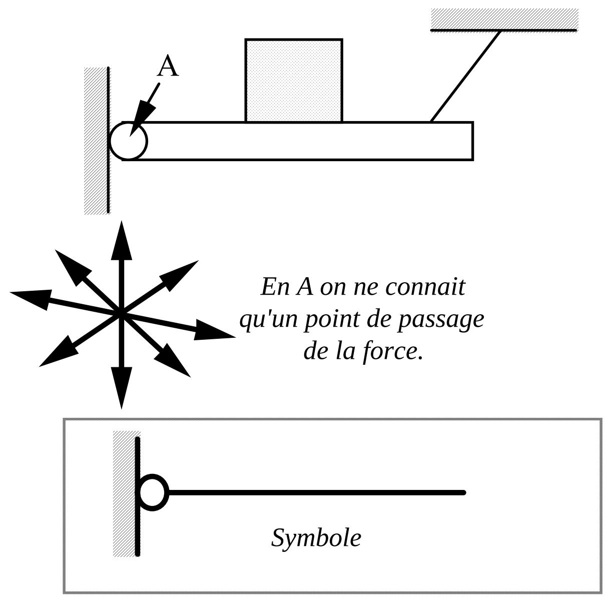


Fig. 3.15

3.4.2 Réactions des appuis

A <u>Appui simple</u> (ou à rouleaux)

L'appui simple est utilisé dans de nombreux ouvrages de construction. Ce type d'appui donne lieu à une réaction R_y **perpendiculaire** à la surface d'appui (ou de contact).

=> Effort perpendiculaire au plan de roulement.

=> Ajouter à l'articulation, il empêche la rotation.

Une seule inconnue:

=> **Grandeur** de la force

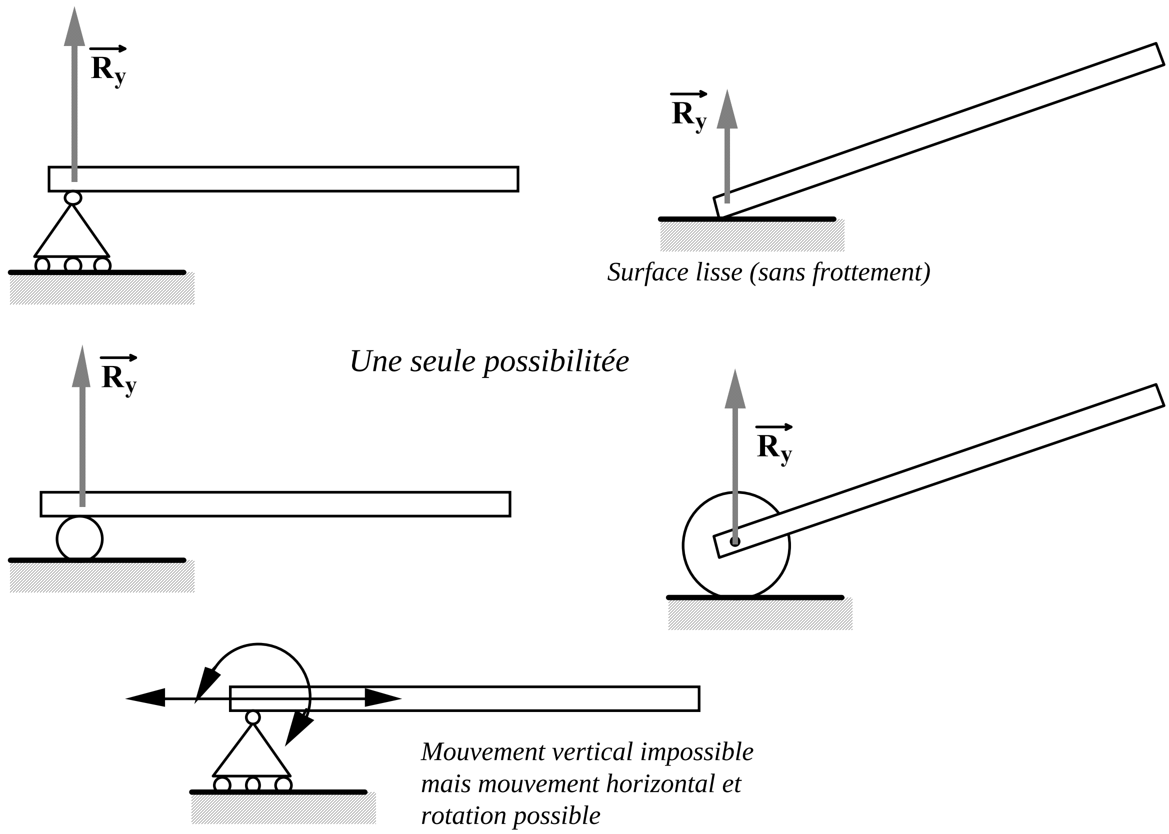


Fig. 3.16

B Appui double (ou à rotule ou à articulation)

L'appui double est largement utilisé dans de nombreux ouvrages de construction. Ce type d'appui donne lieu à une réaction R de grandeur et de direction inconnues. On résout ce type de force en décomposant la réaction R en deux inconnues; R_x horizontale et R_y verticale.

=> Effort passe par l'articulation.

=> Empêche le mouvement horizontal et vertical mais permet la rotation.

Deux inconnues:

⇨ **Grandeur** et
⇨ **Direction** (ligne d'action) de la force.

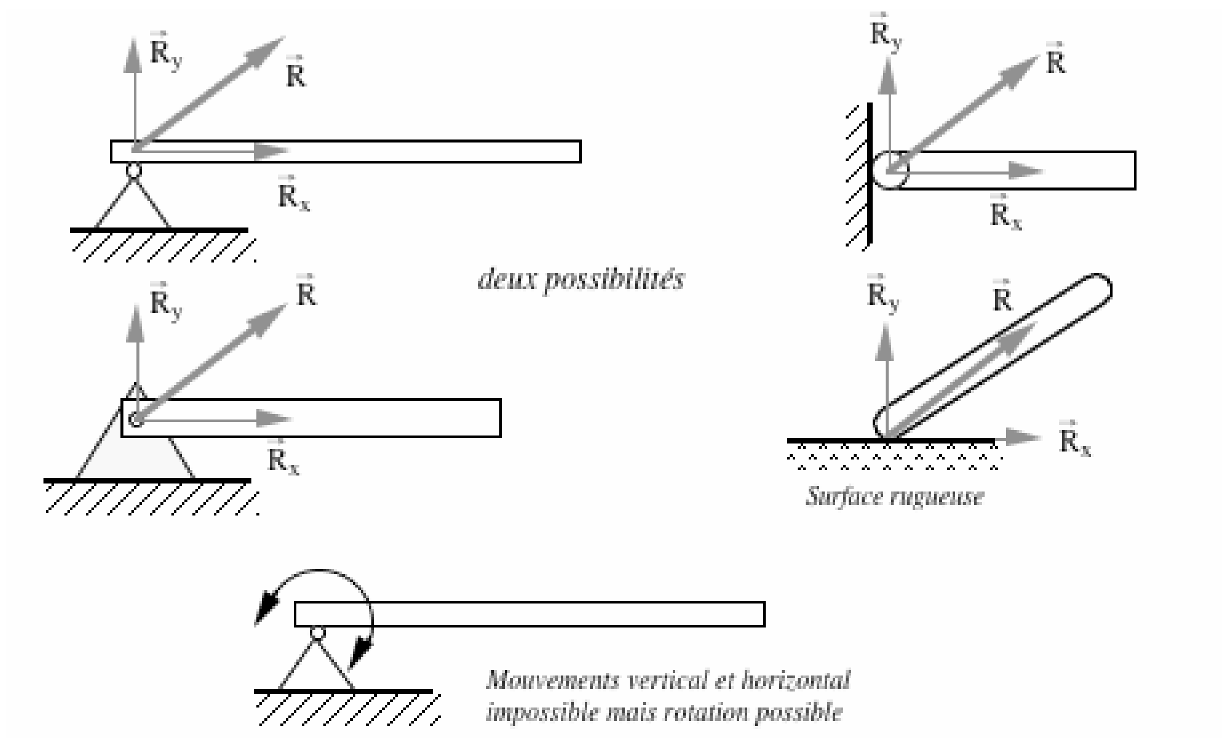


Fig. 3.17

C Appui triple (ou encastrement)

L'appui triple est couramment utilisé dans de nombreux ouvrages de construction. Par exemple, lorsqu'on enfonce un pieu dans le sol ou lorsqu'on soude une pièce de métal à une structure. Ce type d'appui donne lieu à une réaction R de grandeur et de direction inconnues et à un moment d'encastrement M_c. On a donc trois inconnues; R_x horizontale, R_y verticale et M_c.

=> Effort passe par l'encastrement.

=> Il empêche tous les mouvements (horizontal, vertical et rotation)

trois inconnues:

- ⇨ **Grandeur**
- ⇨ **Direction** (ligne d'action) de la force
- ⇨ **Moment d'encastrement**.

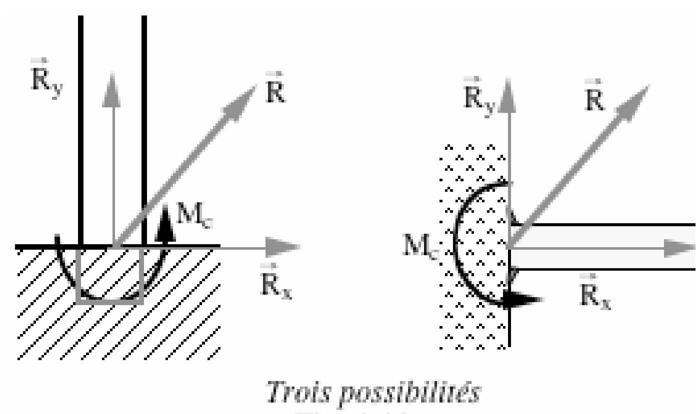


Fig. 3.18

3.4.3 Liaisons équivalentes

La présence d'une ou de deux barres articulées peut être assimilée à des liaisons équivalentes ainsi:

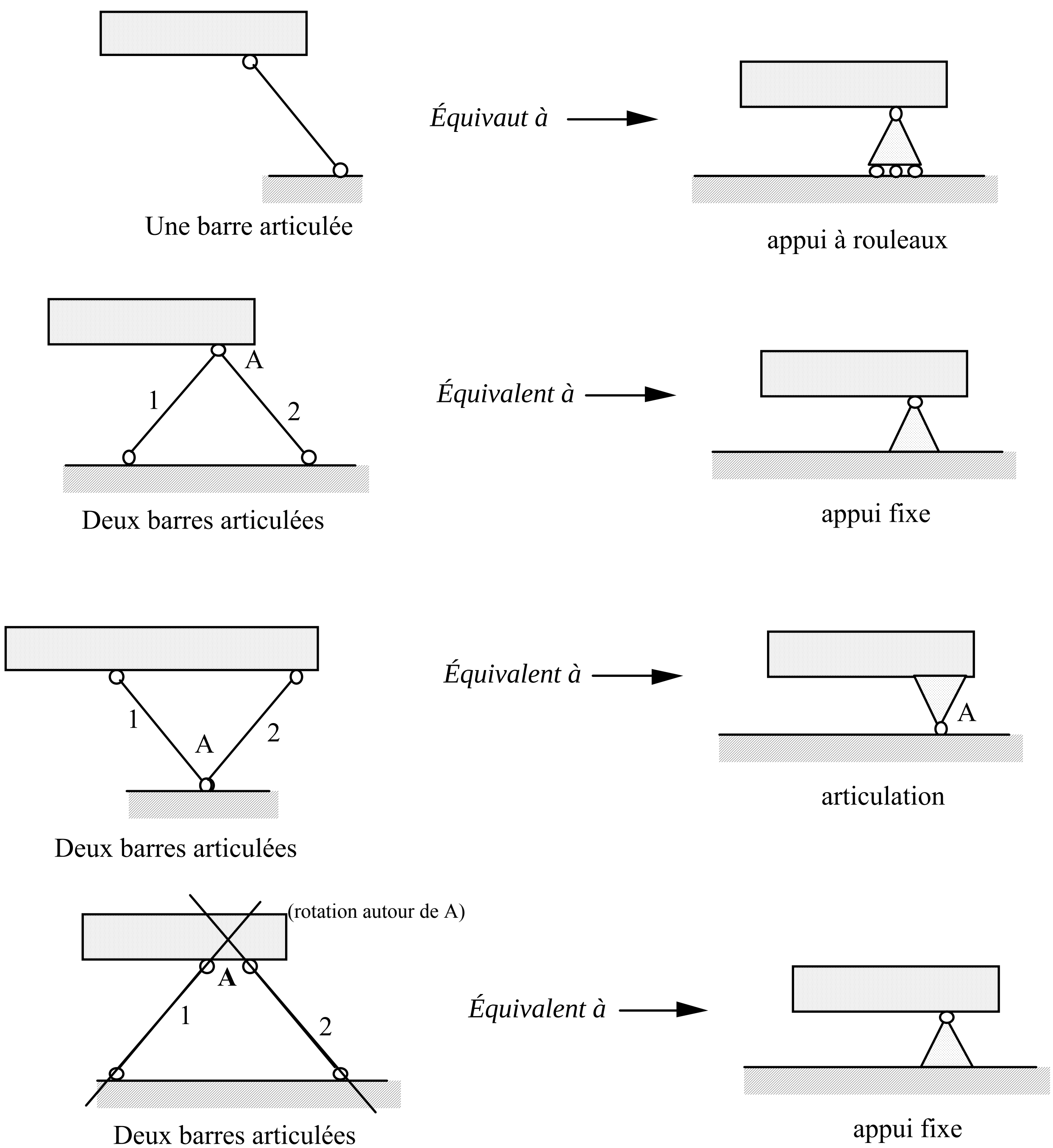


Fig. 3.19

3.4.4 Liaisons complètes

On est en présence de liaisons complètes lorsque la ou les liaisons (ou/et articulations) présentent 3 inconnues. On dénote quatre types de liaisons complètes couramment utilisées.

A <u>Trois barres articulées</u>

On peut complètement lier un corps au moyen de trois barres articulées à **condition** que **"les barres ne soient ni concourantes ni parallèles"**. Avec les trois barres, on a trois inconnues; les trois grandeurs des forces dans les barres.

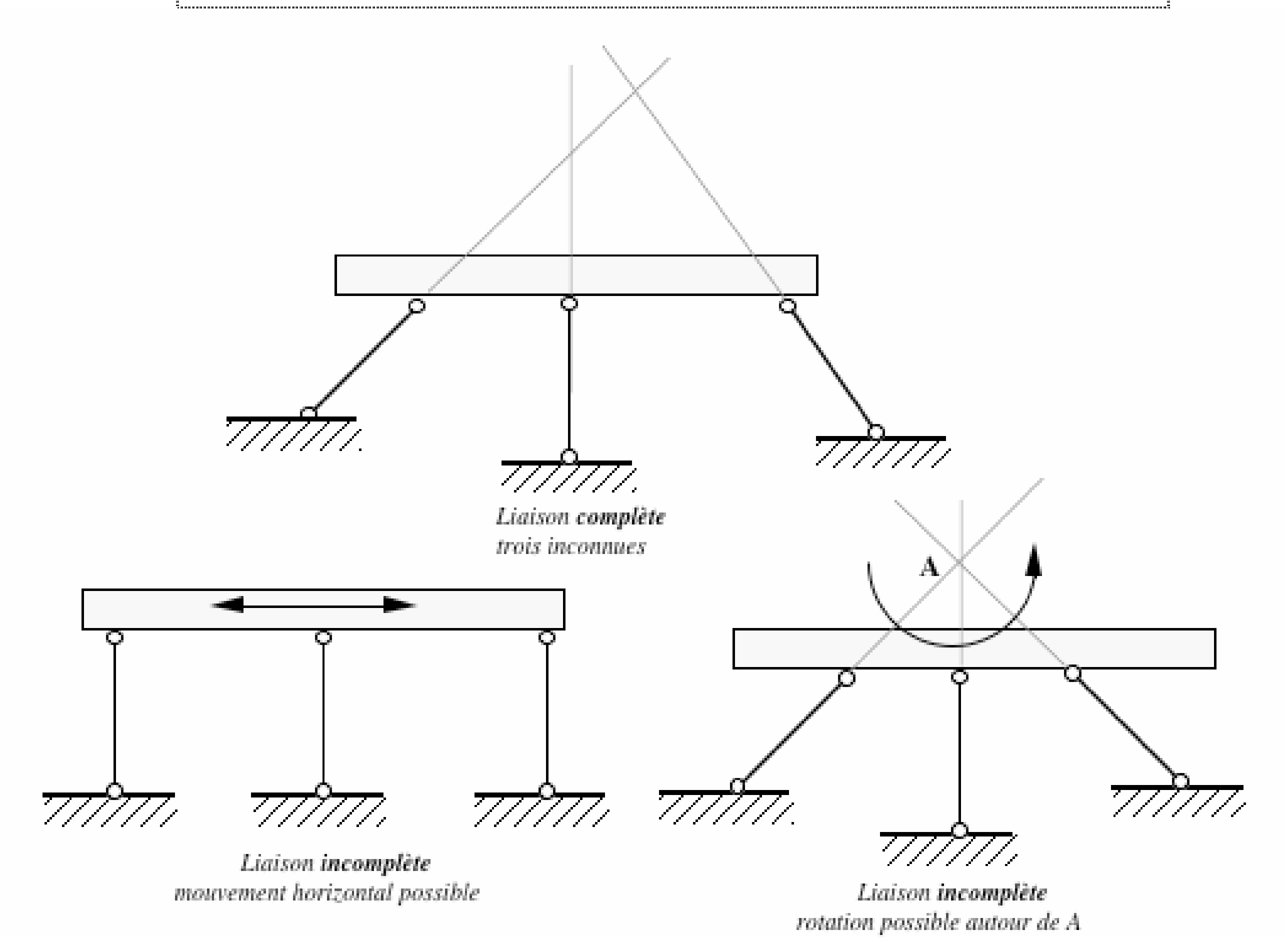


Fig. 3.20

B <u>Une barre articulée</u> (ou un appui à rouleaux) <u>et une articulation</u>

On peut complètement lier un corps au moyen d'une barre articulée (ou appui à rouleaux) et d'une articulation à **condition** que **"la ligne d'action de la barre articulée ou de l'appui à rouleaux ne passe pas par l'articulation"**. Avec une barre on a une inconnue et deux autres avec l'articulation; ce qui nous donne nos trois inconnues.

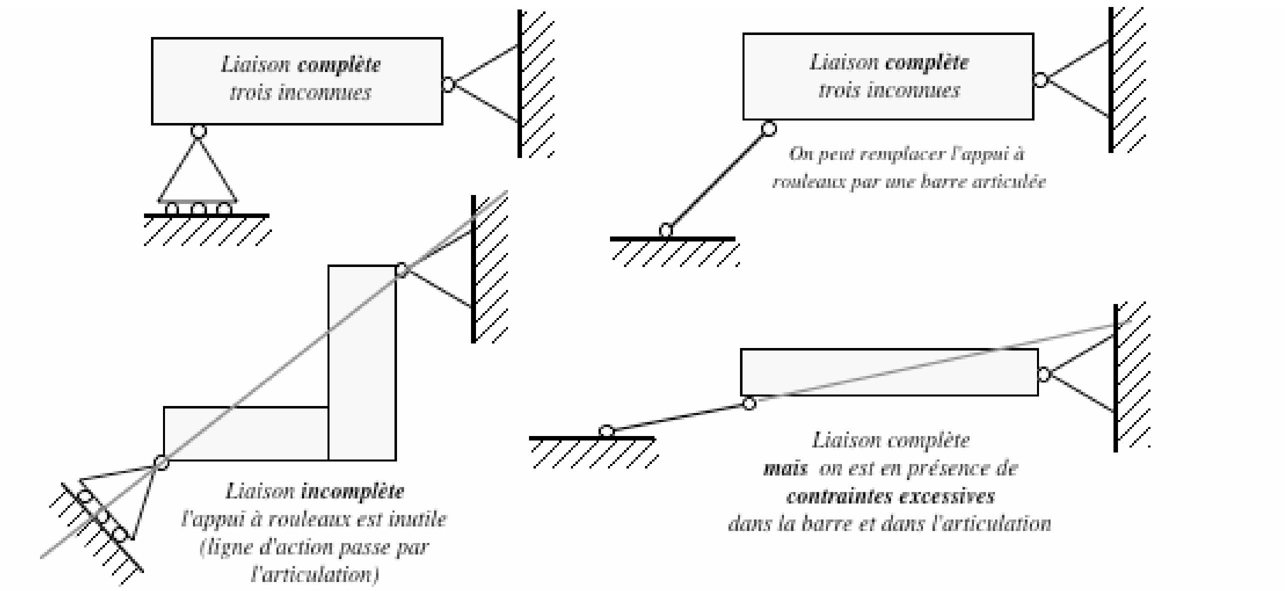


Fig. 3.21

C <u>Un encastrement</u>

On peut complètement lier un corps au moyen d'un encastrement. Avec un encastrement, on a nos trois mouvements; horizontal, vertical et la rotation; ce qui nous donne nos trois inconnues.

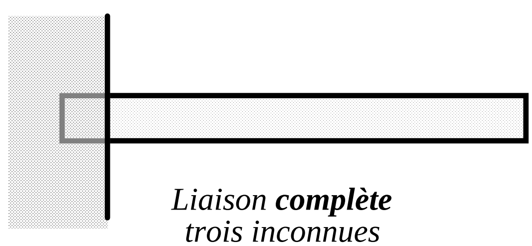


Fig. 3.22

3.5 CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

D'une manière générale, "un corps est en équilibre sous l'action d'un système de forces s'il est au repos, ou en mouvement rectiligne uniforme" (première loi de Newton). Dans ce cours, on étudie seulement l'équilibre des corps au repos.

Dans le plan, il y a trois degrés de liberté:

1-mouvement horizontal,
2-mouvement vertical,
3-rotation.

Pour qu'un corps soit en équilibre il faut empêcher ces trois mouvements.

3.5.1 Équations d'équilibre

A <u>Équilibre de translation</u>

Il y a équilibre de translation si la somme vectorielle de toutes les forces extérieures agissant sur le corps étudié est nulle. C'est-à-dire:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \qquad \textit{(3.3)}$$

Cette relation vectorielle se traduit sur les axes des x et y par les relations suivantes:

$$\sum \mathbf{F_x} = \mathbf{F_{1x}} + \mathbf{F_{2x}} + \mathbf{F_{3x}} + \ldots = \mathbf{0} \qquad \textit{(3.3 a)}$$

et $$\sum \mathbf{F_y} = \mathbf{F_{1y}} + \mathbf{F_{2y}} + \mathbf{F_{3y}} + \ldots = \mathbf{0} \qquad \textit{(3.3 b)}$$

Ces deux équations correspondent aux deux premiers degrés de liberté des conditions d'équilibre; à savoir le mouvement horizontal ($\sum F_x$) et le mouvement vertical ($\sum F_y$), donc nécessairement des deux premières équations d'équilibre.

Dans les méthodes graphiques, ces deux équations se traduisent en fonction de l'addition graphique des forces. Le prochain chapitre traitera plus en profondeur de ces méthodes.

B Équilibre de rotation

Il y aura équilibre de rotation si la somme algébrique des moments de toutes les forces coplanaires appliquées sur un corps est nulle par rapport à n'importe quel axe. C'est-à-dire:

$$\sum \mathbf{M_o} = \mathbf{M_{1o}} + \mathbf{M_{2o}} + \mathbf{M_{3o}} + ... = 0 \qquad (3.4)$$

Où M_{1o} représente le moment de la force F_1 par rapport à une axe "O" situé sur le plan des forces. Il est à noter que l'on peut choisir n'importe lequel axe. De toute façon, la somme doit toujours être égale à zéro. Cette constatation nous amène à choisir un axe qui nous permet de simplifier le problème.

Cette dernière équation correspond au dernier degré de liberté des corps; à savoir la rotation. C'est en fait cette dernière équation qui est la troisième inconnue dans les trois conditions d'équilibre. Encore ici, des méthodes graphiques d'équilibre seront développées dans le prochain chapitre.

En résumé:

H	$\sum \mathbf{F_x} = 0$	①
V	$\sum \mathbf{F_y} = 0$	②
R	$\sum \mathbf{M_o} = 0$	③

3 équations 3 inconnues

3.5.2 Identification des forces

Lorsque l'on veut analyser les forces qui s'exercent sur un corps, il ne s'agit pas d'essayer de trouver des forces en faisant une série d'hypothèses, en se fiant à son intuition ou en faisant une série de raisonnements du genre "le corps à tendance à ... parce que ... donc on doit avoir ....". On doit respecter des méthodes précises afin de bien identifier toutes les variables dont nous avons besoin pour l'étude du corps en question. À partir des notions que nous avons déjà étudier, on tire ceci:

Méthode:

1- Choisir le corps, la structure ou la partie de structure qui nous intéresse. Généralement pour un premier calcul on prend toute la structure.

2- Isoler l'item choisi en le débarassant de tous ses liens et de tous les autres corps en contact.

3- Remplacer tous les liens ou contact par les forces que ces liens ou contacts peuvent exercer sans oublier le poids du corps s'il y a lieu.

Par exemple:

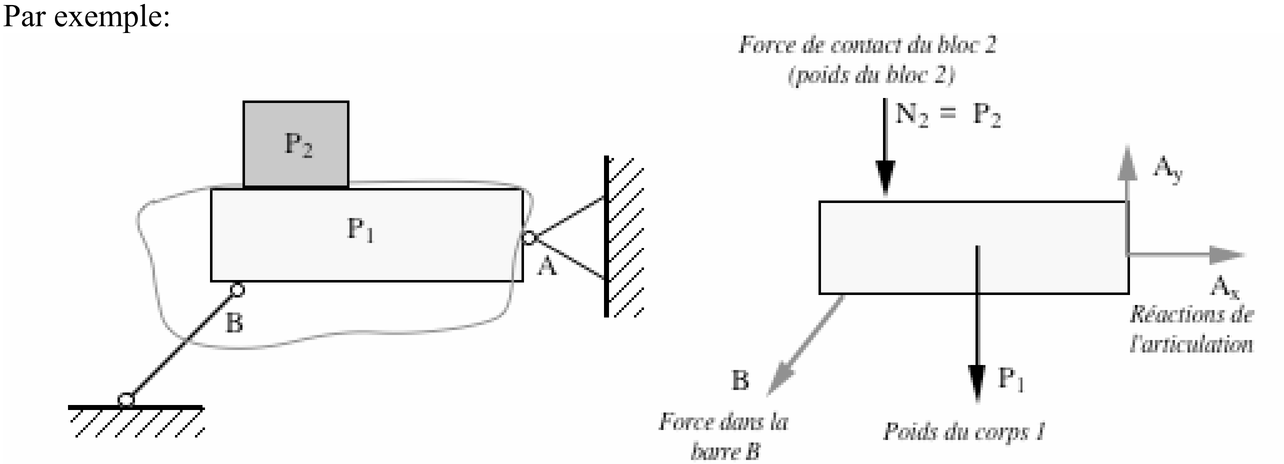


Fig. 3.23

Remarque:

1- Les forces sur un corps représentent les efforts que les articulations, barres articulées, fils ou objets avoisinants peuvent exercer sur ce corps et non pas les efforts qu'on souhaiterait ou aimerait trouver. Les forces intuitives n'existent pas.

Remarque (suite):

2- Ne jamais choisir pour l'étude de l'équilibre une barre articulée ou une corde; ce serait inutile. (forces égales et opposées à chaque extrémité). On peut choisir:

•Un corps,
•Un ensemble de corps,
•Un point de jonction de plusieurs barres ou cordes.

3- Si le premier choix présente trop d'inconnues, on en fait un deuxième et même un troisième au besoin.

4- Quand on fait un choix on le respecte jusqu'au bout.

3.5.3 Efforts internes

Dans ce type de recherche, on a une structure (un corps) qui porte des charges connues et on désire connaître les efforts que supportent les barres, câbles ou articulations qui retiennent la structure, ou bien on désire connaître les efforts internes dans chacune des partie d'une structure.

Méthode:

1- Dessiner la structure avec les charges qu'elle supporte en prenant soin de bien les localiser.

2- Partant du fait qu'une structure est un corps en équilibre et que de ce fait chaque partie, point ou articulation est en équilibre, faire un choix de corps à étudier et identifier toutes les forces en présences.

3- Solutionner graphiquement (prochain chapitre) ou analytiquement en appliquant les trois conditions d'équilibre:

$\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$ et
$\sum M_o = 0$ (s'il y a lieu).

EXEMPLE 3.1: *Déterminer les efforts dans les câbles 1, 2 et 3 de la figure ci-dessous.*

Solution:

Identifions les efforts dans les câbles:

F_1 dans le câble 1
F_2 dans le câble 2
F_3 dans le câble 3

Isolons le corps P. Comme on est en présence de câbles, l'effort est nécessairement en tension. Ici, il est facile ($\sum F_y = F_3 - 510 = 0 \Rightarrow F_3 = 510$ N) de voir que cette tension vaut:

$$\mathbf{F_3 = 510\ N}$$

Comme ici nous n'avons plus d'autre corps à isoler, nous devons isoler le noeud A. Sur A s'exerce la charge F_3 ou P (510 N) et les forces F_1 et F_2 dont les lignes d'action sont dans la direction des câbles.

*Remarque:

- Comme un câble ne peut supporter que des efforts en tension, il est préférable de suppposer un effort en tension; ce qui évite les signes négatifs.

- Pour les barres articulées, il est préférable de supposer des tensions pour éviter les erreurs d'interprétation (par convention on indique une compression par un signe négatif).

$F_{1x} = F_1 \cos 37 = 0{,}8\ F_1$
et $F_{1y} = F_1 \sin 37 = 0{,}6\ F_1$

$F_{2x} = F_2 \cos 53 = 0{,}6\ F_2$
et $F_{2y} = F_2 \sin 53 = 0{,}8\ F_2$

Selon les conditions d'équilibre:

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum F_y = 0$$

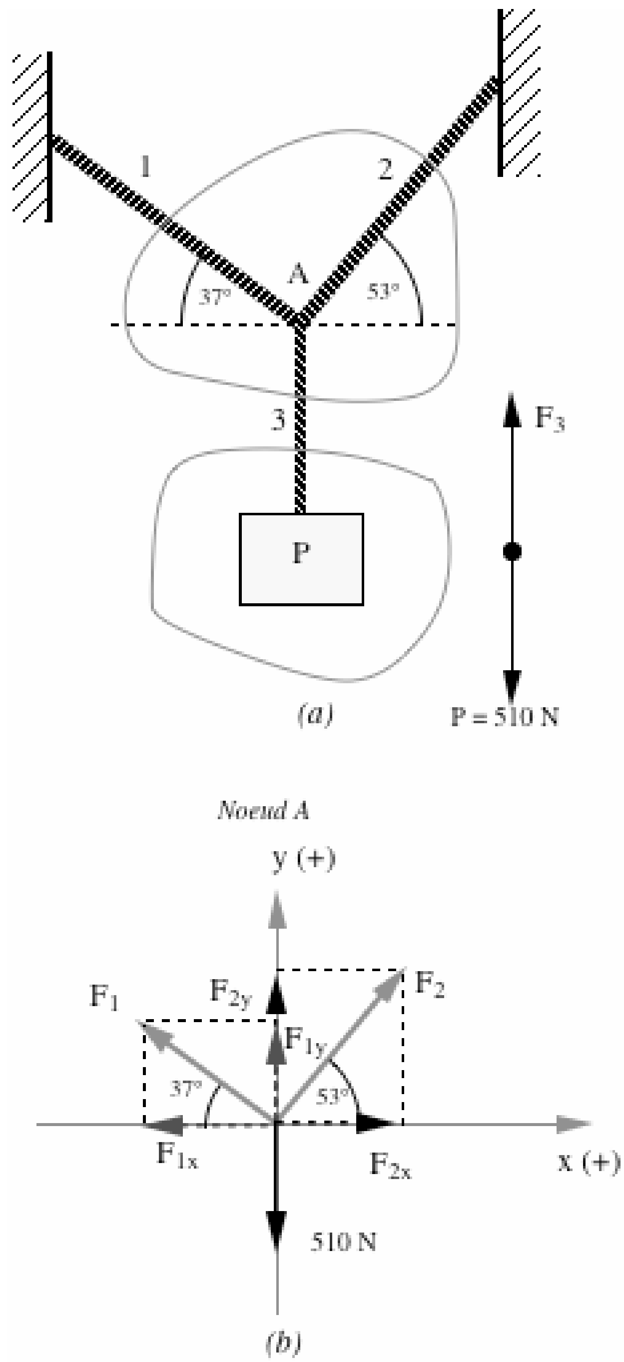


Fig. 3.24

$\sum F_x = F_{2x} - F_{1x} = 0{,}6\ F_2 - 0{,}8\ F_1 = 0$ ①

$\sum F_y = F_{2x} + F_{1x} - 510 = 0{,}8\ F_2 + 0{,}6\ F_1 - 510 = 0$ ②

Deux équations, deux inconnues, écrivons ces deux équations sous la même forme:

$-0{,}8\ F_1 + 0{,}6\ F_2 = 0$ ①

$0{,}6\ F_1 + 0{,}8\ F_2 = 510$ ②

On remarque que l'équation ① = 0; il est donc facile d'isoler soit F_1 ou F_2 de cette équation, et ainsi remettre le résultat dans l'équation ②. Ce qui donne une seule inconnue dans l'équation ②, qui est facile à résoudre. Isolons F_2 dans ①:

$0{,}6\ F_2 = 0{,}8\ F_1$ => $\mathbf{F_2 = 1{,}33\ F_1}$ ①

que l'on insère dans ②:

$0{,}6\ F_1 + 0{,}8\ F_2 = 0{,}6\ F_1 + 0{,}8 \times 1{,}33\ F_1 = 1{,}67\ F_1 = 510$

d'où $\mathbf{F_1} = 510/1{,}67 = \mathbf{306\ N}$

En replaçant cette valeur dans ①:

$\mathbf{F_2} = 1{,}33\ F_1 = 1{,}33\ (306) = \mathbf{408\ N}$

Les valeurs positives de F_1 et F_2 signifient que le sens supposé était exact dans les deux cas. D'où l'on tire:

câble **1**: tension de **306** N et
câble **2**: tension de **408** N

*Remarque: Pour solutionner analytiquement un problème, on doit supposer un sens aux forces. Si le sens donné est inexact, on obtiendra une valeur négative pour la force.

EXEMPLE 3.2: *Déterminer les efforts dans les câbles 1 et 2 et dans les articulations A et B de la figure ci-dessous.*

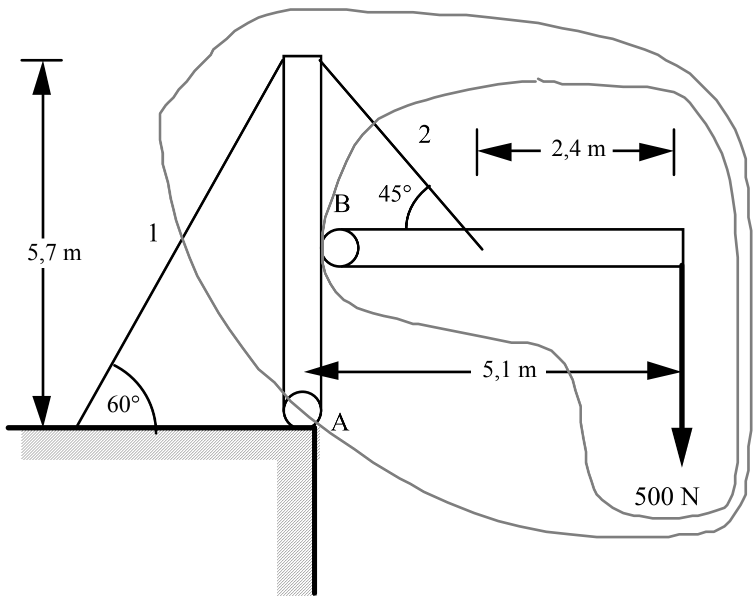


Fig. 3.25

Solution:

Identifions les efforts dans les câbles:

F_1 dans le câble 1
F_2 dans le câble 2

Ici on est en présence d'un ensemble de deux corps. Afin d'étudier les efforts dans les câbles et dans les articulations on doit sélectionner un premier corps à étudier. La sélection de la poutre de droite semble un bon choix car elle permet l'analyse de l'effort dans le câble 2 et dans l'articulation.

On dénote donc trois inconnues; à savoir F_2, B_x et B_y.

On ne connait pas la grandeur de F_2 mais on connait par contre sa direction; ce qui nous donne une inconnue. Dans l'articulation B on ne connait ni la grandeur ni la direction; c'est pourquoi nous la décomposons en deux coordonnées, l'une horizontale B_x et l'autre verticale B_y; ce qui nous donne les deux autre inconnues faisant en sorte que notre corps est complètement lié.

Tout d'abord regardons l'équilibre de translation:

$\sum F_x = B_x - F_{2x} = B_x - F_2 \cos 45 = 0$

D'où **$B_x = F_2 \cos 45$** ①

$\sum F_y = B_y + F_{2y} - 500 = B_y + F_2 \sin 45 - 500 = 0$

D'où **$B_y = -F_2 \sin 45 + 500$** ②

Si l'on applique l'équation découlant du dernier degré de liberté ($\sum M$) nous aurons notre troisième équation permettant de résoudre notre système (trois équations trois inconnues). Ici on arrête notre choix sur B comme axe de rotation.

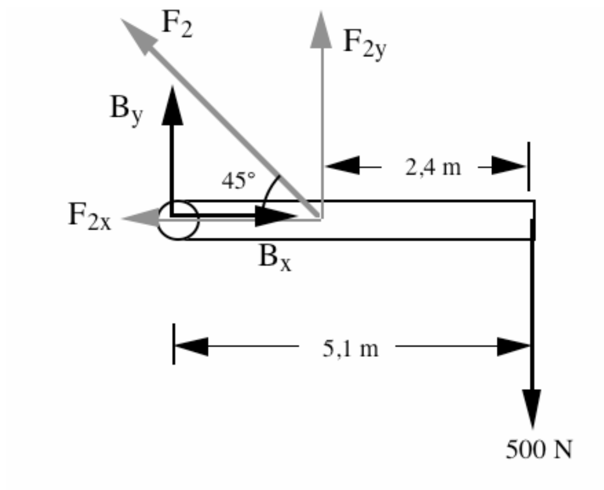


Fig. 3.26

Le choix de **B** s'explique par le fait que l'on élimine les moments dûs aux efforts de B (**ils passent par l'axe de rotation donc pas de bras de levier donc pas de moment**).

$\sum M_B = (F_{2y}\,(2,7) - 500\,(5,1)) = (F_2 \sin 45\,(2,7) - 2550) = 0$

donc $1,91\, F_2 = 2550$

D'où **$F_2 = 1335,7$ N**

Si on insère ce résultat dans l'équation 1 et dans l'équation 2 il nous permettra de résoudre complètement notre système d'équations.

F_2 --> ① **B_x** = 1335,7 cos 45 = **944,4 N**

F_2 --> ② **B_y** = -1335,7 sin 45 + 500 = **-444,4 N**

Selon les lois de la trigonométrie, on a:

$$B = \sqrt{944,4^2 + 444,4^2} = 1043,8 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{444,4}{944,4}\right) = 25,2°$$

Donc: **B = 1043,8 N à 334,8°**

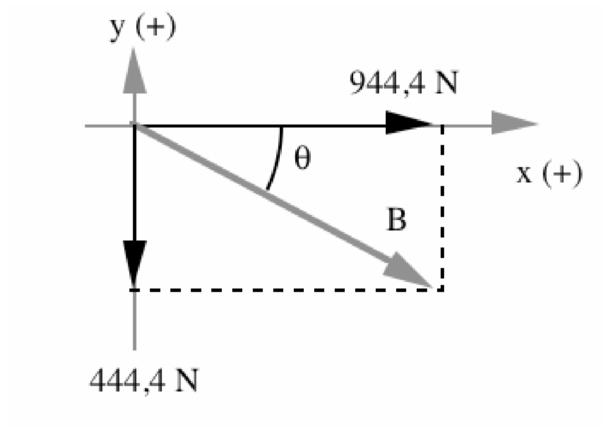


Fig. 3.27

Regardons le reste du problème. Ici, toute la structure est analysée afin de trouver les efforts dans le câble 1 et dans l'articulation A. (voir *figure 3.28*)

Encore ici, nous avons nos trois inconnues nécessaires à l'équilibre de la structure. Nous retrouvons les réactions A_x et A_y de l'articulation ainsi que l'effort dans le câble 1.

Après une observation minutieuse de la structure, on voit qu'il est préférable de débuter notre analyse par la sommation des moments autour de l'axe situé en A. Ce choix nous permet d'éliminer deux inconnues (comme pour la partie précédente) A_x et A_y qui passe tous deux dans l'axe de rotation donc pas de bras de levier donc pas de moment de force.

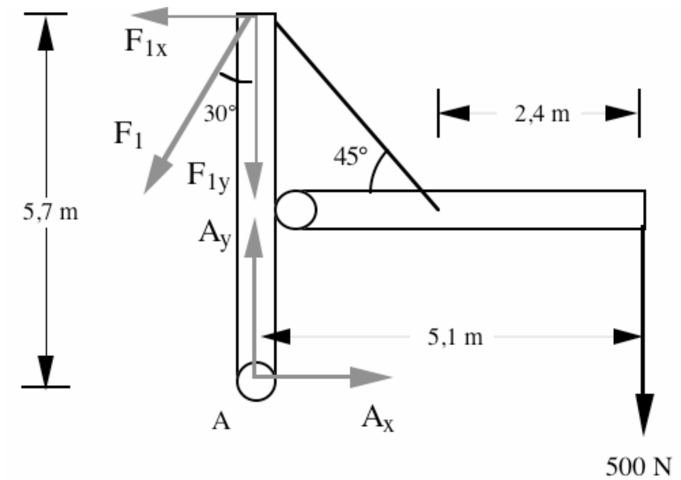


Fig. 3.28

Donc: $\sum M_A = (F_{1x}\,(5,7) - 500\,(5,1)) = (F_1 \sin 30\,(5,7) - 2550) = 0$

D'où **F_1 = 894,8 N**

Si maintenant on regarde du coté de l'équilibre de translation (mouvement horizontale et verticale) on a:

$\sum F_x = -F_{1x} + A_x = 0$

D'où $\mathbf{A_x} = F_{1x} = F_1 \sin 30 =$ **447,4 N**

et $\sum F_y = -F_{1y} + A_y - 500 = 0$

D'où $\mathbf{A_y} = F_{1y} + 500 = F_1 \cos 30 + 500 =$ **1274,9 N**

Selon les lois de la trigonométrie, on a:

$$A = \sqrt{447,4^2 + 1274,9^2} = 1351 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1274,9}{447,4}\right) = 70,6°$$

Donc: **A = 1351 N à 70,6°**

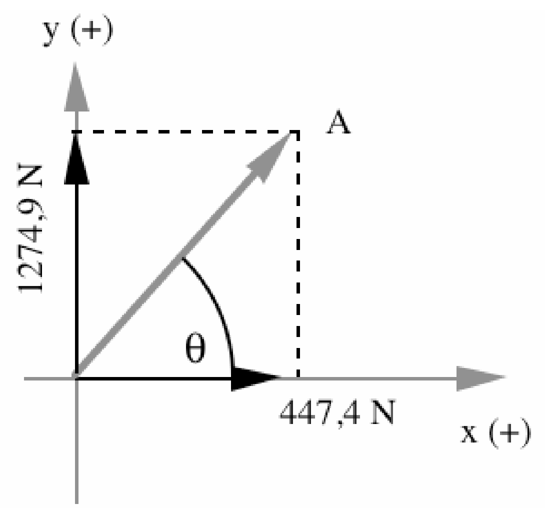


Fig. 3.29

En résumé:

A = 1351 N à 76,2°
B = 1043,8 N à 334,8°
F_1 = 894,8 N
F_2 = 1335,7 N

3.5.4 Calcul des réactions d'appuis

Dans ce type de recherche, on a une structure (un corps) qui porte des charges connues et on désire connaître les efforts que supportent les appuis qui retiennent la structure.

Méthode:

1- Choisir le corps dont on veut étudier l'équilibre (généralement on choisira la totalité de la structure à moins que le nombre d'inconnues soit trop grand).

2- Remplacer les appuis (liens) par les forces qu'ils exercent sur le corps choisi. On suppose toujours un sens aux forces (tension).

3- Établir les équations d'équilibre.

$$\sum \mathbf{F_x} = \mathbf{0}$$
$$\sum \mathbf{F_y} = \mathbf{0}$$
$$\sum \mathbf{M_o} = \mathbf{0}$$

4- Interpréter les résultats. Ne pas oublier que chacune des forces calculées représente l'action d'un appui sur le corps choisi. C'est précisément pour enlever toute ambiguïté qu'on suppose les barres en tension car:

- si la valeur trouvée est (+) cela signifie que la force est dans le sens supposé.

- Si la valeur trouvée est (-) cela signifie que la force est dans le sens contraire du sens supposé.

Convention:

(+) effort en **TENSION**
(-) effort en **COMPRESSION**

EXEMPLE 3.3: *Déterminer les efforts dans les barres 1, 2 et 3 de la figure ci-dessous.*

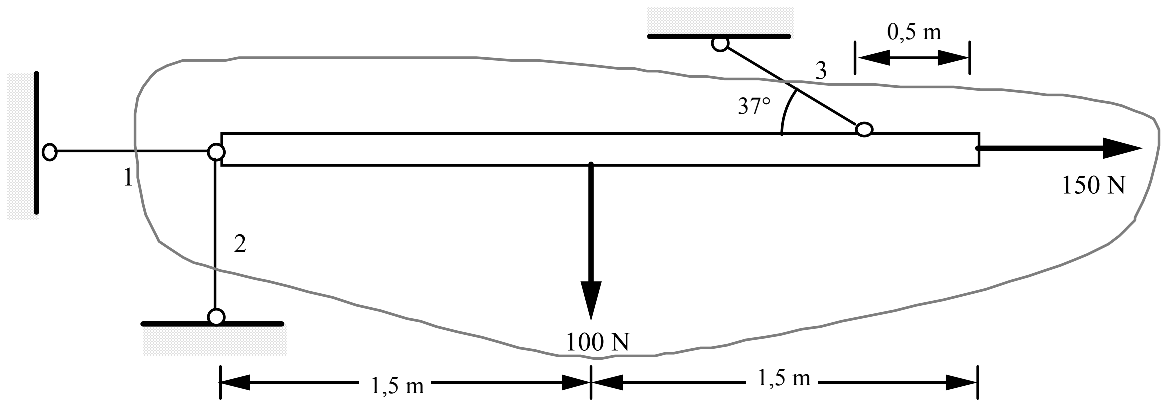


Fig. 3.30

Dans cet exemple, nous isolerons le corps entier en intersectant les trois barres articulées. Nous supposerons donc dans chacune de ces barres des efforts en tension.

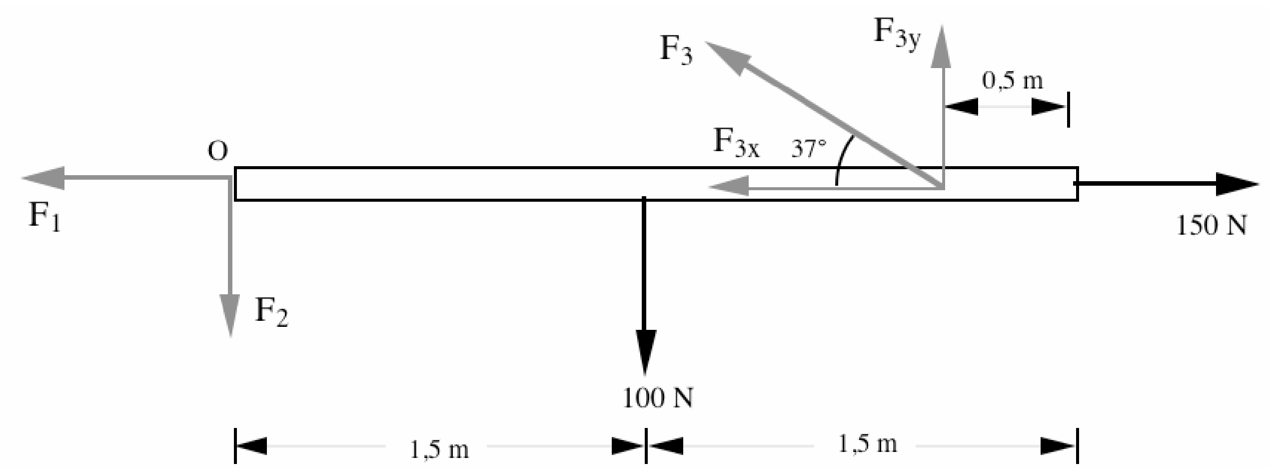


Fig. 3.31

En analysant attentivement la figure ci-dessus, on choisit immédiatement de travailler avec l'équilibre de rotation autour de l'axe O. En effet, ce travail nous permet d'éliminer deux inconnues; à savoir les efforts des les barres 1 et 2 (F_1 et F_2) leur ligne d'action passant directement par l'axe de rotation choisi (**pas de bras de levier donc pas de moment de force**).

Premièrement: $F_{3x} = F_3 \cos 37$

$F_{3y} = F_3 \sin 37$

$$\sum M_o = (-100\,(1{,}5)) + (F_{3y}\,(2{,}5)) = -150 + 2{,}5 \sin 37\, F_3 = 0$$

D'où $1{,}5\, F_3 = 150$ donc $\mathbf{F_3 = 100\ N}$

Maintenant selon l'équilibre de translation:

$$\sum F_x = 150 - F_{3x} - F_1 = 150 - F_3 \cos 37 - F_1 = 150 - 100 \cos 37 - F_1 = 0$$

d'où $\mathbf{F_1} = 150 - 80 =$ **70 N** (positif donc en **tension**)

$$\sum F_y = - F_2 - 100 + F_3 \sin 37 = - F_2 - 100 + 100 \sin 37 = 0$$

d'où $\mathbf{F_2} = - 100 + 60 =$ **- 40 N** (négatif donc en **compression**)

EXEMPLE 3.4: *Déterminer les efforts dans l'articulation A et dans la barre 1.*

Solution:

Dans cet exemple, on isole le corps au complet en intersectant l'articulation A (deux inconnues) et la barre 1 (une inconnue). Nos trois inconnues nécessaires aux conditions d'équilibre des corps.

Encore une fois, il est plus pratique de débuter l'étude de l'équilibre par celle de rotation. Nous choisirons le point A comme axe de rotation, éliminant encore ici les inconnues à l'articulation à savoir A_x et A_y.

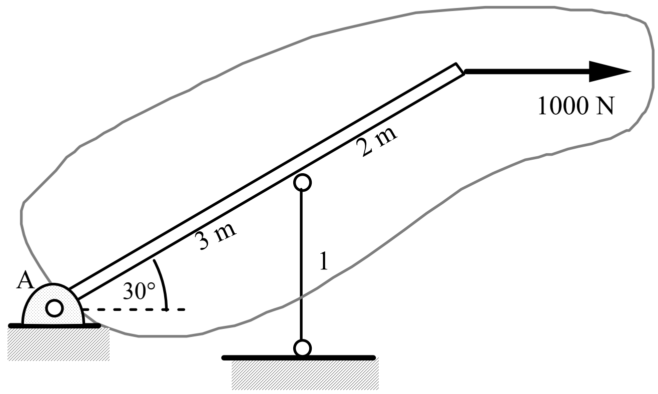


Fig. 3.32

Ici, pour des raisons pratiques, il est plus utile de mesurer les grandeurs du bras de levier perpendiculaire à l'axe de rotation que de décomposer les forces, car le corps est incliné.

Équilibre de rotation:

$$\sum M_A = (- F_1 (3 \cos 30)) + (1000 (5 \sin 30)) = 0$$

D'où $\mathbf{F_1 = - 962}$ **N** (- donc **compression**)

Maintenant, pour l'équilibre de translation:

$\sum F_x = 1000 - A_x = 0$ d'où $\mathbf{A_x = 1000}$ **N**

$\sum F_y = - F_1 - A_y = 0$ d'où $\mathbf{A_y = 962}$ **N**

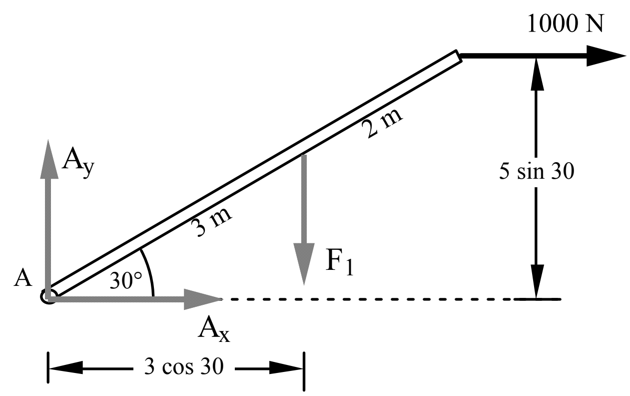


Fig. 3.33

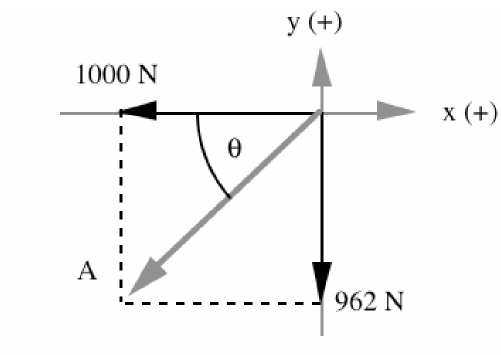


Fig. 3.34

Selon les lois de la trigonométrie, on a:

$$A = \sqrt{1000^2 + 962^2} = 1388 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{962}{1000}\right) = 43{,}9°$$

Donc: **A = 1388 N à 223,9°**

EXEMPLE 3.5: *Déterminer les efforts dans l'articulation A et dans la barre 1. Il n'y a pas de frottement en B.*

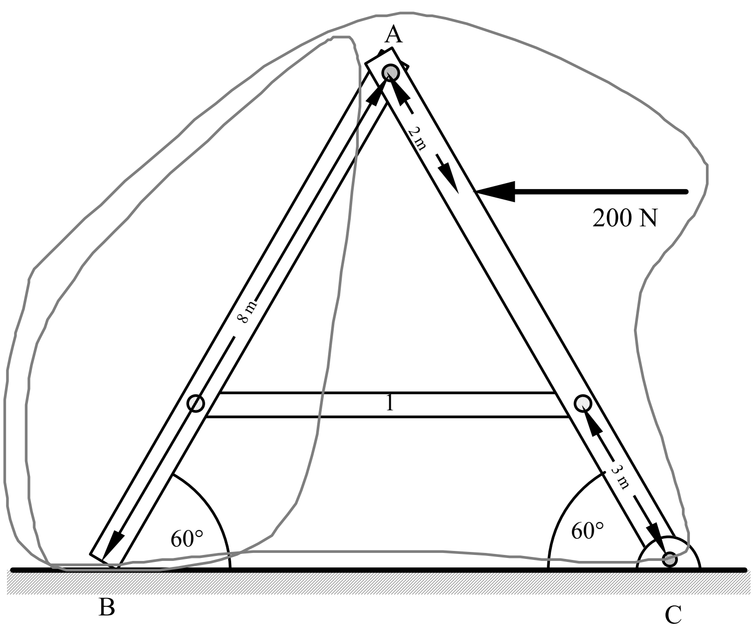


Fig. 3.35

Solution:

Dans cet exemple, si on isole la structure de gauche ou celle de droite on intersecte une barre, une articulation et un appui simple (ou articulation (C). Dans chacun des cas, on est en présence de 4 inconnues à gauche de 5 à droite. Comme les lois de la statique nous permettent seulement trois inconnues pour nos trois équations (conditions d'équilibre) nous isolerons le corps entier afin d'éliminer des inconnues.

En sélectionnant la structure entière on a une articulation et un appui simple donc trois inconnues. (voir *figure 3.36)*

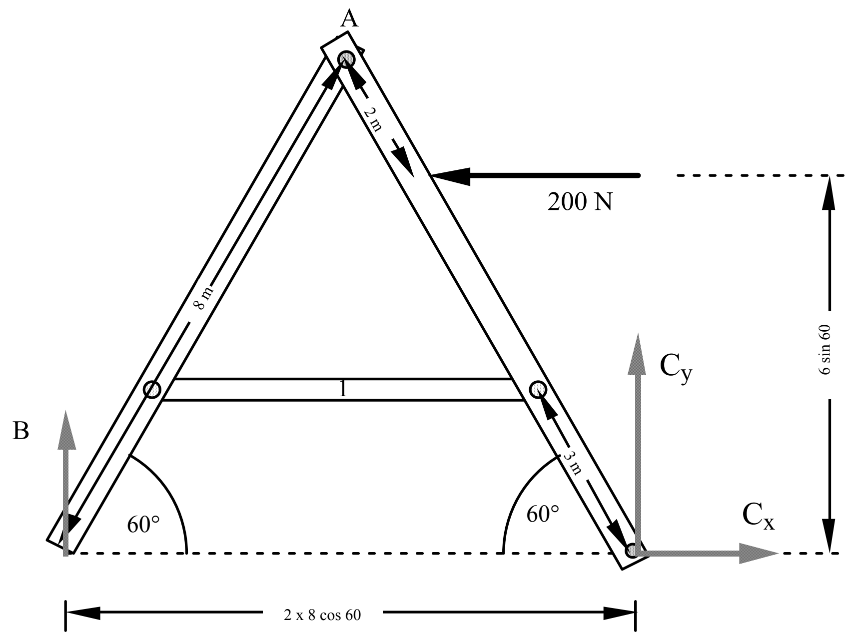


Fig. 3.36

On débute encore par l'équilibre de rotation autour de **C** afin d'éliminer les composantes de **C** (C_x et C_y) donc une équation une inconnue. Ici aussi les corps sont inclinés donc on calcule les bras de levier perpendiculaire à l'axe de rotation pour les forces en présence plutôt que de décomposer les forces.

Donc:

$$\sum M_C = (-B\ (2 \times 8 \cos 60) + 200\ (6 \sin 60)) = (-8\ B + 1040) = 0$$

D'où **B = 130 N**

Maintenant pour l'équilibre de translation:

$\sum F_x = -200 + C_x = 0$ d'où $\mathbf{C_x = 200\ N}$

$\sum F_y = 130 + C_y = 0$ d'où $\mathbf{C_y = -130\ N}$ (autre sens ↓)

On aurait pu se contenter de calculer seulement B car pour le corps de gauche, en intersectant l'appui simple B, l'articulation A et la barre 1; donc en connaissant B on élimine la quatrième inconnue et on retrouve nos trois inconnues caractéristiques. Isolons maintenant la partie de gauche. On connait B, il ne nous reste qu'à trouver A et F_1. (voir *figure 3.37)*

Donc:

$$\sum M_A = (-130\ (8 \cos 60) + F_1\ (5 \sin 60)) = 0$$

D'où **F_1 = 120 N** (+ donc **tension**)

et $\sum F_x = A_x + F_1 = 0$

$A_x = - F_1$

d'où **A_x = - 120 N** (autre sens ←)

$\sum F_y = 130 + A_y = 0$

D'où **A_y = -130 N** (autre sens ↓)

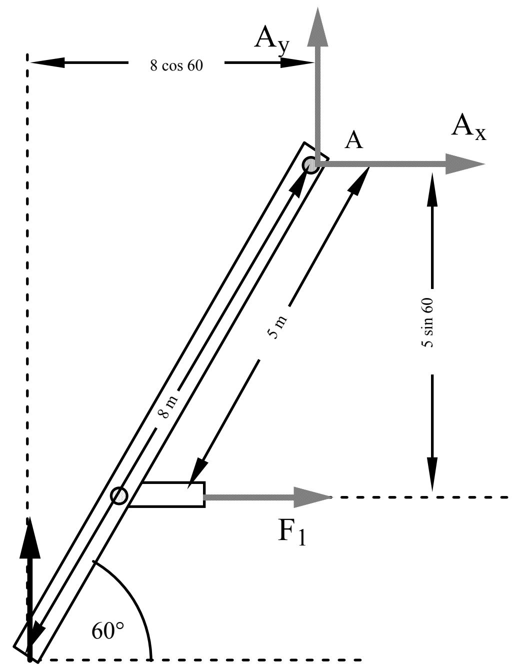


Fig. 3.37

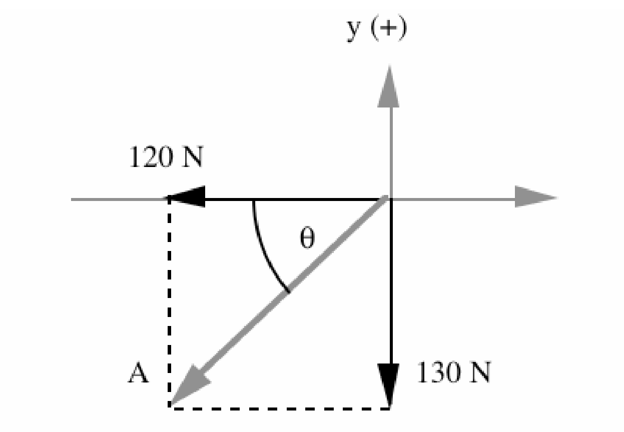


Fig. 3.38

Selon les lois de la trigonométrie, on a:

$$A = \sqrt{120^2 + 130^2} = 177 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{130}{120}\right) = 47{,}3°$$

Donc: **A = 177 N à 227,3°** (180° + 47,3°)

Ce qu'il y a d'intéressant dans ce problème; c'est que nous aurions pu effectuer la sélection de droite pour arriver au même résultat, seulement l'allure des forces aurait été inversée en raison du principe d'action réaction que nous avons déjà abordé. Les efforts sont tracés dans le sens réel. L'action de l'une des parties égale la réaction de l'autre. (*fig. 3.39*)

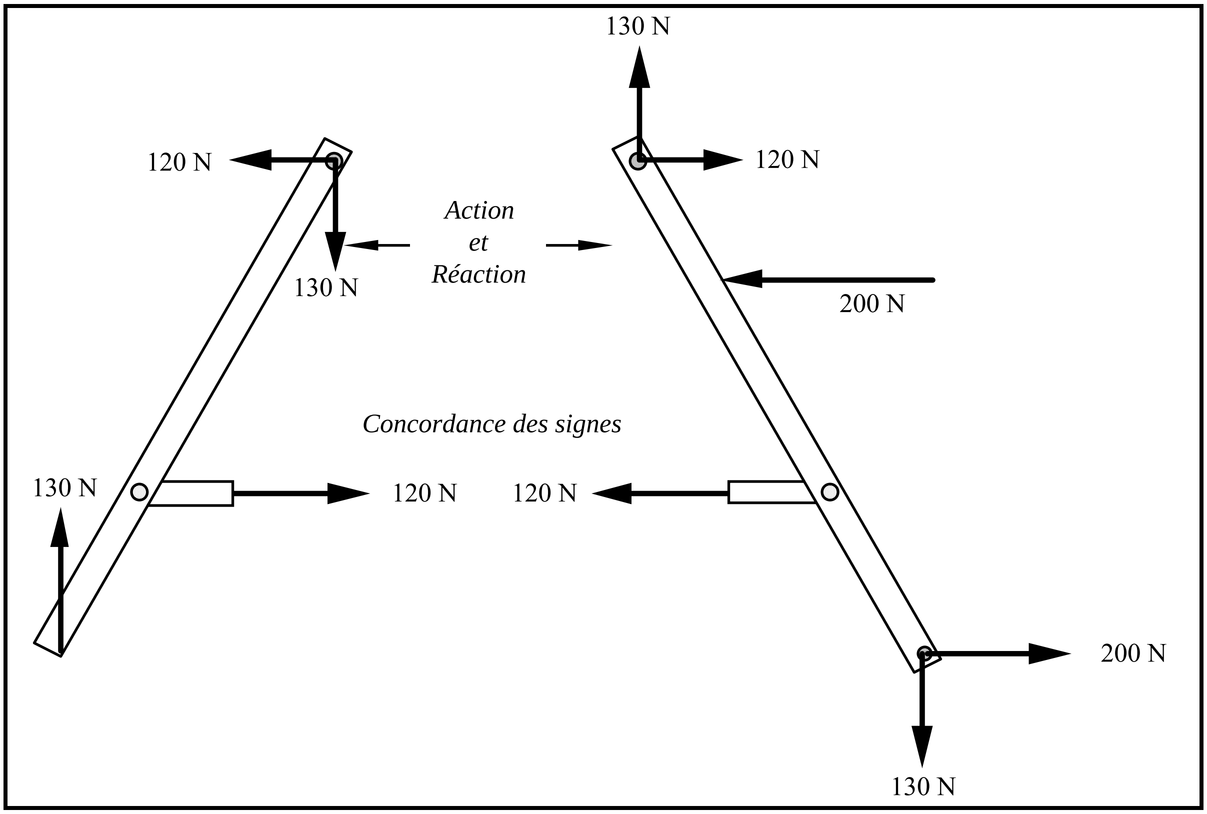

130 N
120 N
120 N
Action
et
Réaction
130 N
200 N
Concordance des signes
130 N
120 N
120 N
200 N
130 N

Fig. 3.39