Le théorème de Bell

(Le présent article fait intervenir des notions de calcul différentiel, intégral, vectoriel et de nombres complexes. Une connaissance minimum de ces notions est nécessaire pour la compréhension)

Tout d'abord, rappelons-nous que l'intégration sur une distance allant de $-\infty$ à $+\infty$ de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ normalisée nous donne la probabilité totale de trouver la particule qu'elle décrit, soit 1. En d'autres termes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx = 1$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)\ \Psi^*(x,t)$$

où

$\Psi(x,t)$ = partie réelle + partie imaginaire

$\Psi^*(x,t)$ = partie réelle – partie imaginaire = conjugué complexe

(On voit que la normalisation de la fonction d'onde nous permet de rendre celle-ci entièrement réelle).

De plus, rappelons-nous la définition de la « densité de probabilité » ($\rho(x)$) :

Probabilité d'un événement situé entre x = a et (x + dx) = b :

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) \, dx$$

On voit ainsi que le deuxième graphique de la *Figure 1* de la *piste verte* représente la densité de probabilité $\rho_1(r)$ en fonction de la position r.

Voici deux résultats utiles concernant la densité de probabilité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \, dx = 1$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \rho(x) \, dx$$ où $\langle f(x) \rangle$ est la valeur moyenne de f(x)

Paradoxe EPR

> *We [Einstein et Pais] often discussed his notions on objective reality. I recall that during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it. The rest of this walk was devoted to a discussion of what a physicist should mean by the term "to exist."*
>
> Abraham Pais[1]

Comme nous l'avons vu dans la *piste verte*, la mécanique quantique mène au paradoxe EPR. Regardons ensemble un exemple quantitatif du paradoxe EPR (cet exemple a été imaginé par David Bohm).

Considérons la désintégration du méson pi (une particule quelconque) en un électron et un positron :

$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$

Supposons que l'électron et le positron vont dans des directions opposées. Puisque le spin[2] du méson pi (π^0) est nul, la conservation du moment angulaire impose que l'électron et le positron aient des spins opposés afin que l'addition de ceux-ci donne 0. Ainsi, puisque le spin peut être « up » ou « down », on a les situations suivantes possibles :

Spin de l'électron est « up » → $\uparrow_-$	**OU**	Spin de l'électron est « down » → $\downarrow_-$
Spin du positron est « down » → $\downarrow_+$		Spin du positron est « up » → $\uparrow_+$

La fonction d'onde Ψ décrivant le système comprenant l'électron et le positron n'est pas une simple addition des 2 fonctions d'onde individuelles[3] :

$\Psi\,(e^-,e^+) \neq 1/\sqrt{2}\,[\Psi_a(e^-) + \Psi_b(e^+)] \neq 1/\sqrt{2}\,[\uparrow_- + \downarrow_+] \neq 1/\sqrt{2}\,[\uparrow_+ + \downarrow_-]$

Mais plutôt le produit de celles-ci :

$\Psi\,(e^-,e^+) = \Psi_a(e^-)\,\Psi_b(e^+)$

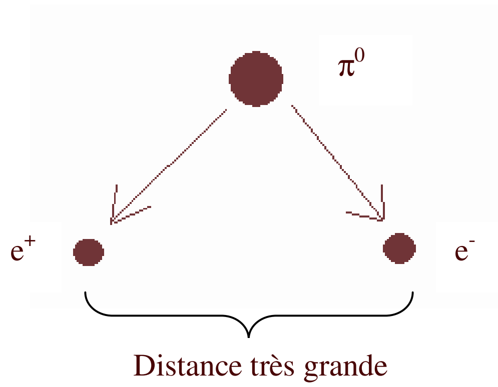
Cette situation fait en sorte que l'on ne peut pas démêler les 2 particules. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que l'une des particules est dans l'état Ψ_a et l'autre, dans l'état Ψ_b. C'est ce que nous appelions l'enchevêtrement des particules dans la *piste verte*.

La fonction d'onde résultante pour le système qui nous intéresse est :

$\Psi\,(e^-,e^+) = 1/\sqrt{2}\,[\Psi_a(e^-)\,\Psi_b(e^+) - \Psi_b(e^-)\,\Psi_a(e^+)] = 1/\sqrt{2}\,[\uparrow_-\downarrow_+ - \downarrow_-\uparrow_+]$

Cette équation peut être démontrée en mécanique quantique relativiste, mais, en mécanique quantique non-relativiste (celle que nous faisons), il faut la prendre comme un axiome.

Cette équation nous montre que si l'on mesure le spin de l'électron comme étant « up », celui du positron doit être « down » et *vice-versa*. Hors, si l'état des particules n'est pas déterminé à l'avance, si la mesure condense l'état des particules, ceci dit que dès que l'on mesure le spin de l'électron ou du positron, on condense l'état de son spin **et de celui de l'autre particule en même temps**, peut-importe sa distance. Une telle influence à distance viole le principe de localité qui dit, entre autre, qu'aucune information ne peut voyager plus vite que la lumière.

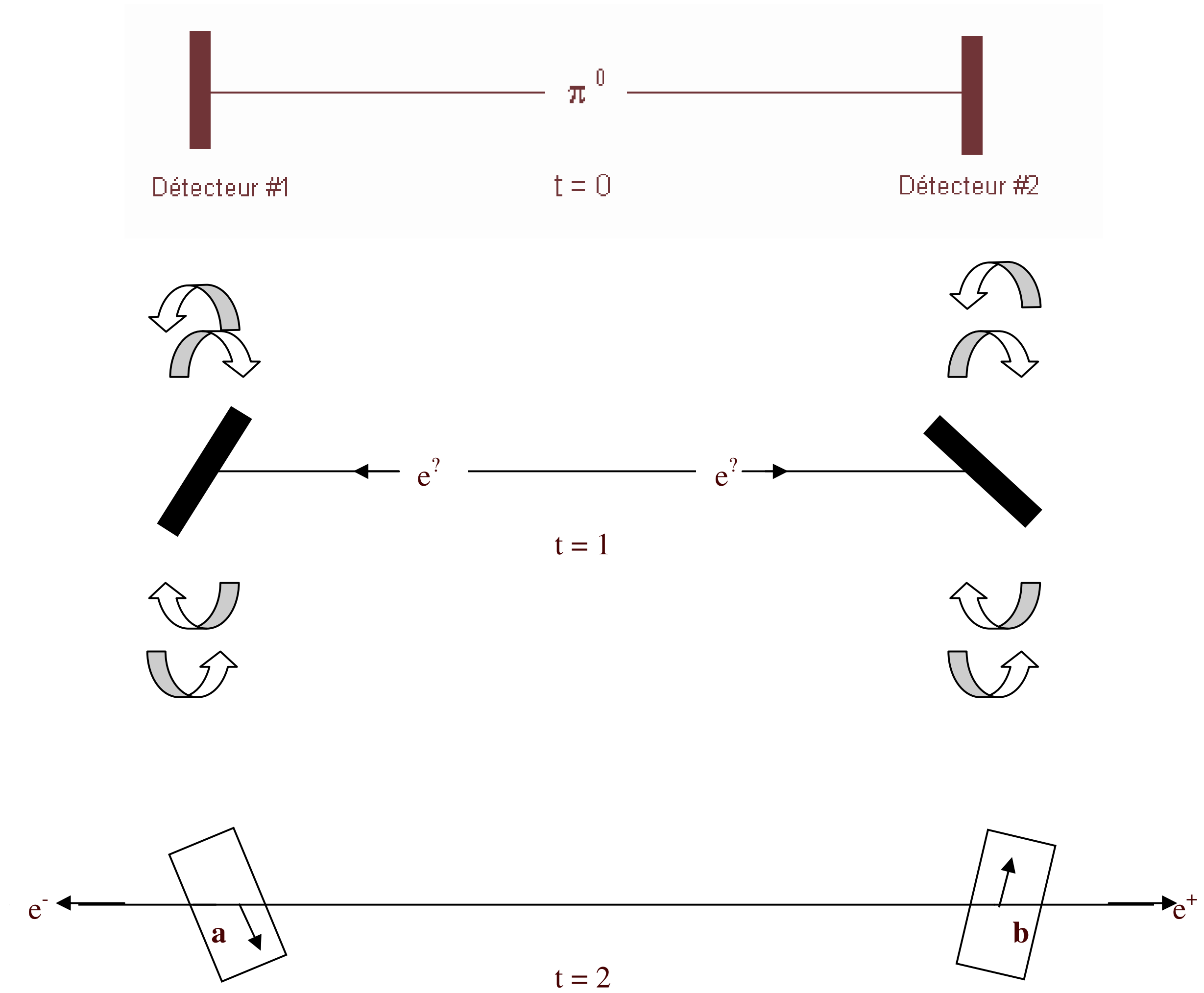


Voici une représentation de notre exemple. Tant que la mesure n'a pas été prise, l'état du positron ou de l'électron n'est pas déterminé (du point de vue orthodoxe). Une fois l'état d'une des 2 particule déterminé, l'autre l'est automatiquement par conservation du moment angulaire.

Gedankenexperiment Bell

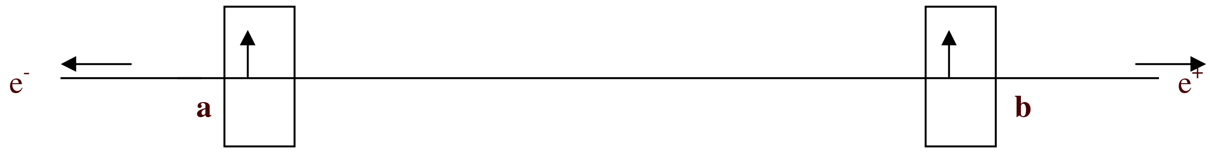
> *Anybody who's not bothered by Bell's theorem has to have rocks in his head*
>
> - A distinguished [and anonymous] Princeton physicist

John Bell, dans son article de 1964, a proposé une généralisation de l'expérience EPR/Bohm. Les détecteurs de spins dans l'expérience de pensée de Bell sont en rotation aléatoire. Le premier détecteur mesure la position du spin de l'électron selon un vecteur unitaire **a** et le deuxième détecteur mesure le spin du positron selon un vecteur unitaire **b**.



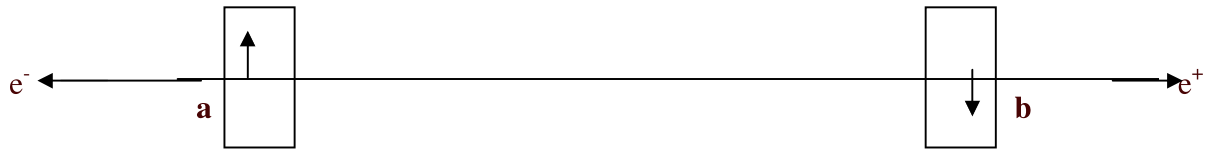
On voit ici une illustration de l'expérience de pensée de Bell. La première figure montre les 2 détecteurs au départ. Par la suite, lors de la désintégration du méson pi, les détecteurs commencent à tourner de manière aléatoire. Finalement, la troisième figure représente un agrandissement des détecteurs afin de nous montrer leurs orientations **a** *et* **b** *une fois la mesure prise.*

Bell propose de calculer la moyenne du produit des spins pour une certaine orientation des détecteurs donnée. Appelons cette moyenne P(**a**,**b**). Si les détecteurs sont parallèles (**a** = **b**), on se retrouve avec l'expérience EPR imaginée par Bohm[4].



P(**a**,**b**) = P(**a**,**a**) = -1

Si les détecteurs sont anti-parallèles (**b** = -**a**), on a que



P(**a**,**b**) = P(**a**,**-a**) = 1

Pour n'importe quelle orientation, nous avons[5] :

P(**a**,**b**) = **-a · b**

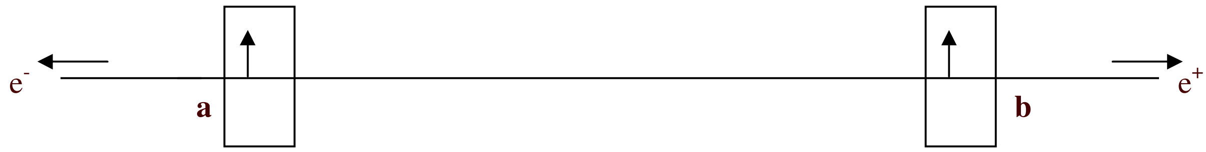
Maintenant, supposons que la mécanique quantique est incomplète et que l'état « complet » du système électron/positron est caractérisé par la variable λ (qui, comme nous l'avons dit dans la *piste verte*, peut-être une constante, une variable ou une entière collection de chiffres). λ varie (on ne sait pas comment) d'une désintégration de pion à l'autre de sorte que la mesure des spins est parfaitement corrélée et indépendante de la position des détecteurs l'un par rapport à l'autre.

Selon ceci, il existe une fonction A(**a**,λ) et B(**b**,λ) qui donnent respectivement le résultat de la mesure du spin de l'électron et du positron. Dans notre exemple, ces valeurs ne peuvent être que de ±1.

A(**a**,λ) = ±1

B(**b**,λ) = ±1

Quand les détecteurs sont alignés, on se retrouve avec les résultats précédents :



$A(\mathbf{a},\lambda) = -B(\mathbf{b},\lambda) \quad \forall\lambda \quad \Rightarrow \quad P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = P(\mathbf{a},\mathbf{a}) = -1$

Pour toutes les orientations possibles des détecteurs, la moyenne des produits des prises de mesure sera :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, B(\mathbf{b},\lambda)\, d\lambda$$

où $\rho(\lambda)$ est la densité de probabilité de la variable cachée. Puisque nous ne savons pas la forme de cette densité de probabilité, nous considérerons seulement qu'elle n'est pas négative et qu'elle satisfait à la condition de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, d\lambda = 1$

Puisque l'on a $A(\mathbf{a},\lambda) = -B(\mathbf{b},\lambda)$, on peut écrire :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, B(\mathbf{b},\lambda)\, d\lambda = -\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{b},\lambda)\, d\lambda$$

Introduisons maintenant un troisième vecteur unitaire **c** (qui représente une orientation différente que peut avoir l'un des détecteurs lors de la prise de mesure) :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, C(\mathbf{c},\lambda)\, d\lambda$$

$$A(\mathbf{a},\lambda) = -C(\mathbf{c},\lambda) \quad \Rightarrow \quad P(\mathbf{a},\mathbf{c}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{c},\lambda)\, d\lambda$$

Unissons maintenant les 2 moyennes des produits des prises de mesure :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{b},\lambda)\, d\lambda\right] - \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{c},\lambda)\, d\lambda\right]$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda)\, [A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)\, A(\mathbf{c},\lambda)]\, d\lambda$$

Puisque $[A(\mathbf{b},\lambda)]^2 = 1$

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) \{A(\mathbf{a},\lambda) A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda) A(\mathbf{c},\lambda) [A(\mathbf{b},\lambda)]^2\} d\lambda$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b},\lambda) A(\mathbf{c},\lambda)] A(\mathbf{a},\lambda) A(\mathbf{b},\lambda) d\lambda$$

(PAUSE : Vous ne savez pas trop où on veut en venir ? Ne vous inquiétez pas, le résultat intéressant arrive. Souvent, résumer en quelques lignes des années de recherches ne nous donne pas idée du contexte qui a mené au développement des résultats déterminants. Les étudiants de physique sont constamment confrontés à de tels résumés. Il y a 3 réactions possibles :

1- On se pose des questions, encore des questions, toujours des questions. On bloque, on demande au professeur qui nous sert une réponse longue comme le bras, quelque chose d'incompréhensible ou de hors sujet. Une telle attitude mène à la folie ou à un bac en 4 ans.
2- On fait rentrer le tout par une oreille, on essaie de le retenir dans notre tête jusqu'à l'arrivée de l'examen (surtout si le prof a insisté sur la démonstration) et on laisse ressortir par l'autre oreille après. On y revient plus tard s'il y a besoin/intérêt pour la chose.
3- On dort durant la démonstration, on se réveille à la fin du cours, un rond de bave sur le pupitre et on obtient un A+ à l'examen.

Personnellement, je suis un petit mélange de la catégorie 1 et 2. FIN DE LA PAUSE)

Puisque $A(\mathbf{a},\lambda) = \pm 1$ et $B(\mathbf{b},\lambda) = \pm 1$, on a $-1 \leq [A(\mathbf{a},\lambda) A(\mathbf{b},\lambda)] \leq 1$ et $\rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b},\lambda) A(\mathbf{c},\lambda)] \geq 0$. Alors :

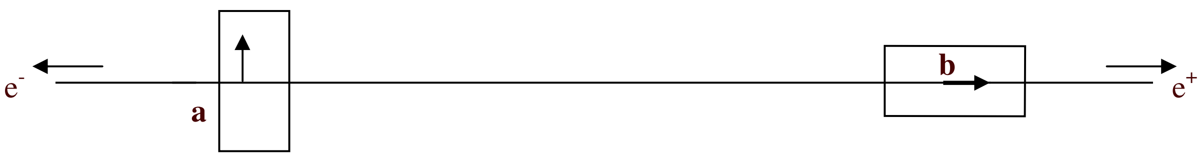
$$| P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c}) | \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b},\lambda) A(\mathbf{c},\lambda)] d\lambda$$

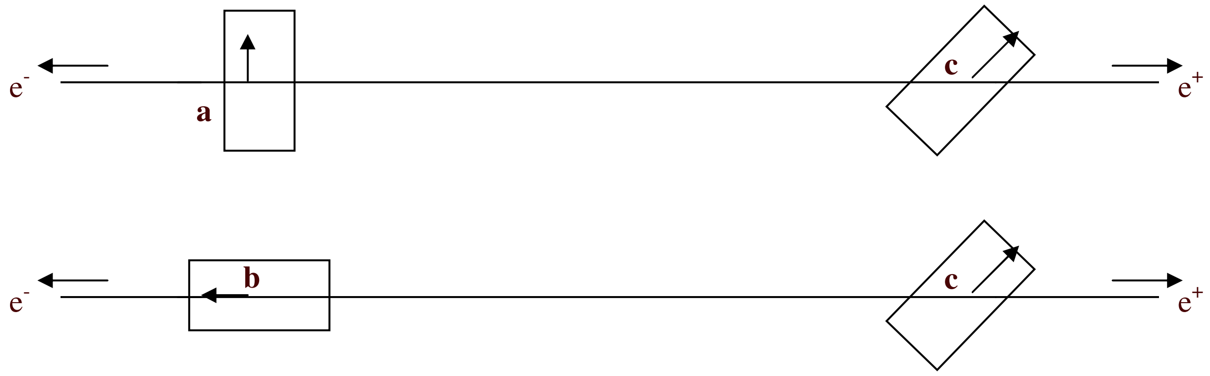
ou

$$\boxed{| P(\mathbf{a},\mathbf{b}) - P(\mathbf{a},\mathbf{c}) | \leq 1 + P(\mathbf{b},\mathbf{c})}$$

Ceci est la fameuse inégalité de Bell. Elle est la conséquence de l'introduction d'une variable cachée dans les équations de la mécanique quantique.

Faisons maintenant un exemple avec des valeurs pour **a**, **b** et **c** :





Le graphique nous montre une orientation des détecteurs telle que **a** *et* **b** *sont à 90° l'un de l'autre et* **c** *est à 45° des deux autres vecteurs.*

Si nous calculons :

P(**a**,**b**) = -**a** · **b** = 0 P(**a**,**c**) = -**a** · **c** = -1 · sin 45° = -0,707 = -1 · cos 45° = **-b** · **c** = P(**b**,**c**)

Hors, ceci ne respecte pas l'inégalité de Bell :

| 0 - -0,707 | = 0,707 qui n'est pas ≤ 1 – 0,707 = 0,293

Il y a deux choix : soit la mécanique quantique se trompe, soit une théorie à variable cachée mène à de faux résultats et ce, peu importe ce qu'est la variable cachée.

Les expériences faites sur l'inégalité de Bell depuis la fin des années 80 prouvent toutes que l'inégalité est violée à chaque fois et que les spins des particules sont corrélés. La mécanique quantique ne se trompe donc pas dans ce cas.

We have always had a great deal of difficulty
understanding the world view
that quantum mechanics represents.

At least I do,
because I'm an old enough man
that I haven't got to the point
that this stuff is obvious to me.

Okay, I still get nervous with it....

You know how it always is,
every new idea,
it takes a generation or two
until it becomes obvious
that there's no real problem.

I cannot define the real problem,
therefore I suspect there's no real problem,
but I'm not sure
there's no real problem.

Richard Feynman

---

[2]Spin : Nombre qui caractérise le moment cinétique de l'électron considéré comme une petite sphère chargée pivotant autour d'un axe. [Office de la langue française, 1956]

[3]N'oublions pas que le $1 / \sqrt{2}$ est une condition de normalisation. La probabilité de trouver l'électron lorsqu'il est seul est de 100 % et la probabilité de trouver le positron lorsqu'il est seul est de 100 %. Ainsi :

$$|\Psi(e^-)|^2 = 1 = \uparrow_- \uparrow_-^* = \downarrow_- \downarrow_-^*$$
$$|\Psi(e^+)|^2 = 1 = \uparrow_+ \uparrow_+^* = \downarrow_+ \downarrow_+^*$$

Hors, si l'on associe les 2 fonctions d'onde, la fonction d'onde obtenue doit mener à une probabilité de 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(e^-,e^+)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \{A[\Psi_a(e^-)\Psi_b(e^+) - \Psi_b(e^-)\Psi_a(e^+)]\}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \{A[\uparrow_-\downarrow_+ - \downarrow_-\uparrow_+]\}^2 = 1$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 [\uparrow_-\uparrow_-^* \ \downarrow_+\downarrow_+^* - \underbrace{(\uparrow_-\downarrow_+ \ \downarrow_-^*\uparrow_+^*)}_{=0} - \underbrace{(\downarrow_-\uparrow_+ \ \uparrow_-^*\downarrow_+^*)}_{=0} + (\downarrow_-\downarrow_-^* \ \uparrow_+\uparrow_+^*)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 [1 + 1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2A^2 \rightarrow A^2 = ½ \rightarrow A = 1 / \sqrt{2}$$

[4]Pour plus de simplicité, nous supposons que les spins sont enregistrés par les détecteurs en unités de $\hbar/2$. Ainsi chacun des détecteurs enregistre soit +1 (spin « up ») ou –1 (spin « down »). Notons que $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π ($\approx 1{,}0547 \times 10^{-34}$ J • s).

[5]Ce point est trop long à démontrer ici. Nous vous laissons l'agréable tâche d'aller vérifier dans la littérature (dire que je voulais tuer mes profs de physique quand ils me disaient ça ! ;o)).

Remerciements :

J'aimerais remercier encore une fois M. Jérôme Gauthier, étudiant à la maîtrise en physique nucléaire à l'Université Laval, ainsi que Le Groupe de Recherche en Physique des Ions Lourds de l'Université Laval[6].

Références :

[1]PAIS, A., "*Einstein and the quantum theory*", Reviews of Modern Physics **51**, (1979), p. 907

GRIFFITHS, David J., « *Introduction to quantum mechanics* », Éditions Prentice-Hall, 1994, 394 p.

MERMIN, David N., "*Is the Moon There When Nobody Looks? Reality and the Quantum Theory*." Physics Today, vol. 38, p. 38 (1985).

- [6]http://thomson.phy.ulaval.ca/ions_lourds/gil-fr.html

- http://www.physique.usherb.ca/attracte/08-1999/epr.html