Approximation du binôme.
Application en physique

L'approximation du binôme est le développement en série de l'expression $(1+z)^n$
Pour $z \langle\langle 1$ on a : $(1+z)^n \approx 1+nz$.(formule du binôme)

Vérifions d'abord la validité de cette approximation :
Si z = 0,01 et n = 2 alors :
$(1+z)^n = (1+0{,}01)^2 = 1{,}0201$
$1+nz = 1+2\times 0{,}01 = 1{,}0200$
L'approximation est valable à 0,01%, ce qui est très bon.

Application à la force d'un dipôle. Pb. 4 (b), chap.1, H.Benson.

La formule exacte (pb. 4 (a)) est donnée par : $F_{3y} = kQq\left[\dfrac{1}{(y-a)^2} - \dfrac{1}{(y+a)^2}\right]$

On cherche une approximation de cette formule pour $y \to \infty$ (ou $y \rangle\rangle 1$)
On applique la formule du binôme à chaque terme de la formule exacte.

- 1er terme : $\dfrac{1}{(y-a)^2}$
- Avant tout, on doit mettre ce terme sous une forme sur laquelle on peut appliquer la formule du binôme. Pour ce faire, on doit mettre la quantité qui tend vers l'infini (ici *y*) en évidence :

$$\frac{1}{(y-a)^2} = \frac{1}{y^2\left(1-\dfrac{a}{y}\right)^2}$$

- On ramène le terme obtenu au numérateur :

$$\frac{1}{y^2\left(1-\dfrac{a}{y}\right)^2} = \frac{1}{y^2}\left(1-\frac{a}{y}\right)^{-2}$$

- On applique la formule du binôme au terme $\left(1-\dfrac{a}{y}\right)^{-2}$ pour lequel n = -2 et $z = \dfrac{-a}{y}$:

$$\left(1-\frac{a}{y}\right)^{-2} \cong 1+(-2)\left(-\frac{a}{y}\right) \cong 1+\frac{2a}{y}$$

Donc : $\dfrac{1}{(y-a)^2} \cong \dfrac{1}{y^2}\left(1+\dfrac{2a}{y}\right)$

- 2ème terme : on procède comme pour le 1er terme

$$\frac{1}{(y+a)^2} \cong \frac{1}{y^2\left(1+\dfrac{a}{y}\right)^2} \cong \frac{1}{y^2}\left(1+\frac{a}{y}\right)^{-2} \cong \frac{1}{y^2}\left(1-2\left(\frac{a}{y}\right)\right) \cong \frac{1}{y^2}\left(1-\frac{2a}{y}\right)$$

- On reporte l'approximation des deux termes dans la formule exacte.

$$F_{3y} \cong kQq\left[\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{2a}{y}\right)-\frac{1}{y^2}\left(1-\frac{2a}{y}\right)\right]$$

$$F_{3y} \cong \frac{4kQqa}{y^3} \qquad \text{(approximation du binôme)}$$

En conclusion, la force exercée par un dipôle sur une charge est, à grande distance, à peu près égale à :

$$\frac{\text{constante}}{(\text{distance})^3}$$

Vérification numérique :
Prenons: $Q = q = 1\mu\text{C}$, $y = 1\text{m}$ et $a = 0{,}01\text{m}$ et $k = 9{,}00\text{x}10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2$.
La formule exacte donne : $F_{3y} = 360{,}072\mu\text{N}$

Approximation du binôme : $F_{3y} = 360{,}000\mu\text{N}$

L'approximation est valide à 0,02%, ce qui est très bon.